解答: 証明の根拠の誤り・抜けを見つけて、全文を書き直す

MomentDesk · https://momentdesk.com/ja/practice/diagnose-and-rewrite-faulty-geometric-proofs/

中2 数学

1. 結論を根拠に使う循環

   まだ示していないPA=PBを根拠にすると循環します。元の仮定から導き直します。

2. AM=BM

   中点の定義からAM=BMです。任意の点Pからの距離については直接言えません。

3. 与えた角は、示した二辺の間の角ではない

   ABとACの間は角A、DEとDFの間は角Dです。角BとEをその間の角とはできません。この三事実だけでその合同条件を使う説明は不適切です。

4. 内角の和から∠B=∠Eを導く

   ABの両端はA,B、DEの両端はD,Eです。残りの角B,Eが等しいことを内角の和から導きます。

5. F

   並べた順からA↔D、B↔F、C↔Aです。点名が一つ重なっていても対応順を読みます。

6. 同じ一組の線分を二回数えている

   PQとQPは同じ線分です。共通な一組として使えますが、独立した二組にはなりません。

7. 対頂角は等しいという既習の性質

   交わる二直線の対頂角という配置と、既習の性質を結びます。測定や見た目を一般の根拠にはしません。

8. その二直線が平行だという使える根拠

   平行線の性質を使うには、その線が平行だという仮定や、それまでに導いた根拠が必要です。

9. 一例の測定だけでは一般の証明にならない

   一例の観察は予想に役立ちますが、仮定から既知の性質を使って一般に導く証明が別に必要です。

10. 直角三角形の斜辺と他の一辺がそれぞれ等しいという条件

    直角三角形に使える既習の専用条件です。一般の二辺とその間の角という条件に無理に言い換えません。

11. 今示す性質そのものを、先に根拠にした

    その性質を証明する課題なので、それ自体を根拠にせず、平行線と角や共通辺から合同を示します。

12. 合同な三角形の対応する辺からBC=EFと述べる

    合同後の対応B↔E,C↔Fを確かめ、対応する辺が等しいことから目標へ結びます。

13. 角が同じでも大きさが異なり、合同とは限らない

    同じ角で拡大した形が作れます。三角の等しさだけでは合同を保証しません。

14. 元の仮定から結論まで、修正した全証明を書く

    どの文をなぜ改めたかと、修正後の論理のつながりが必要です。診断だけや仮定の無断追加では完了しません。

記述問題の解答・確認の観点

Mは線分ABの中点、PはMを通りABに垂直な直線上のM以外の点です。目標はPA=PBです。ある説明は「PA=PB、AM=BM、PMは共通だから三辺で合同」としました。自分の図で、使えない根拠を特定し、元の仮定から始める正しい全証明を書いてください。

PA=PBは結論なので、先に使うのは循環。△AMPと△BMPでAM=BMは中点、MP=MPは共通、∠AMP=∠BMP=90°はPM⊥ABから言える。二辺とその間の角がそれぞれ等しいので△AMP≡△BMP。対応する辺からAP=BP。

本人の図、中点と垂直の仮定、循環箇所、二辺の間の直角、合同後の対応辺まで見る。正しい結論だったことだけで元の証明を認めない。

AB=ACの三角形ABCで、DはBCの中点です。目標は∠BAD=∠CADです。ある説明はAB=AC、BD=CD、ADは共通から「△ABD≡△CAD」と書いて、そのまま目標を結論しました。本人の図を描き、三組の辺と頂点の対応順を照合し、全文を書き直してください。

示した三組に合う順は△ABDと△ACD。AB=ACは仮定、BD=CDは中点、AD=ADは共通なので三辺がそれぞれ等しく△ABD≡△ACD。対応A↔A,B↔C,D↔Dより∠BAD=∠CAD。元の△CADの順ではABにCAが対応してもBDにADが対応してしまい、示した三組と一致しない。

本人が対応する頂点を明示し、仮定・中点・共通辺の各根拠から正しい合同順と角の結論まで書く。別の一貫した順も認める。

△ABCと△DEFでAB=DE、∠B=∠E=64°、∠C=∠F=47°です。目標はAC=DFです。ある説明は「一辺とその両端の角が等しいので合同」とだけ書きました。自分の二図に、どの角が辺の端にあるかを示し、抜けた推論を補って、仮定から目標まで全文を書いてください。

辺ABの両端はA,Bで、Cはその端ではない。内角の和から∠A=∠D=180°−64°−47°=69°。AB=DEは仮定、両端A,Dの69°とB,Eの64°がそれぞれ等しいので、一辺とその両端の角から△ABC≡△DEF。対応する辺よりAC=DF。

69°を図の測定や追加仮定にせず、内角の和から証明中で導く。既知の辺の両端と合同後の対応辺を結ぶ全証明を見る。

凸四角形ABCDでAB∥CD、AD∥BCです。対角線BDを引き、AB=CDかつAD=BCを合同から示す課題です。ある説明は最初に「平行四辺形の対辺は等しいのでAB=CD、AD=BC」と使いました。本人の図で先取りを指摘し、その性質を使わず、元の平行の仮定から全証明を書き直してください。

今示す対辺の等しさを先に使っている。△ABDと△CDBで、AB∥CDから∠ABD=∠CDB、AD∥BCから∠ADB=∠CBD（いずれも錯角）。BD=DBは共通なので一辺とその両端の角がそれぞれ等しく△ABD≡△CDB。対応する辺からAB=CD、AD=CB。

本人の凸四角形・対角線、二組の平行に基づく別々の錯角、共通BDの両端、対応と二つの目標まで見る。平行四辺形の既知の別性質を一律に禁止するのでなく、この証明対象の先取りを避ける。

長方形ABCDの対角線AC,BDがEで交わります。目標はAE=CEかつBE=DEです。ある説明は「図ではEが真ん中に見え、測っても半分なので成立する」としました。本人の図を描き、測定だけでは不足する理由を述べ、長方形の対辺の平行・等長を既習として使って全証明を書いてください。対角線が互いに二等分するという性質自体は先に使いません。

一例の見た目や測定は一般の根拠にならない。△ABEと△CDEでAB=CDは長方形の対辺の性質。AB∥CDより∠BAE=∠DCE、∠ABE=∠CDEは錯角で等しい。一辺とその両端の角がそれぞれ等しいので△ABE≡△CDE。対応する辺よりAE=CE、BE=DE。

対角線の二等分を先取りせず、使ってよい対辺の性質から二組の錯角を導く。本人の図、測定の限界の診断、二つの等長までの全証明を見る。

中心Oの円に異なる二点A,Bを取り、ABは直径でないとします。Mは弦ABの中点です。目標はOM⊥ABです。ある説明は「OA=OB、OM=OM、MO=MOの三組で△OAM≡△OBM」としました。本人の図で重複を指摘し、不足する根拠を補って垂直まで全部証明してください。

OMとMOは同じ共通辺で、二組に数えられない。△OAMと△OBMでOA=OBは同じ円の半径、AM=BMはMが中点、OM=OMは共通。三辺がそれぞれ等しいので△OAM≡△OBM。対応する角∠OMA=∠OMB。A,M,Bは一直線上で二角の和は180°なのでそれぞれ90°。よってOM⊥AB。

弦が直径でないのでOとMが異なり三角形がつぶれない。本人の図、共通辺の重複という診断、半径・中点・共通の三組、等角と180°から90°への全論証を見る。

∠C=∠F=90°の△ABCと△DEFで、AB=DE=10cm、BC=EF=6cmです。目標は∠A=∠Dです。ある説明は「二辺AB,BCと角C、二辺DE,EFと角Fで、二辺とその間の角が等しい」としました。自分の二図で角の位置を指摘し、既習の直角三角形の合同条件を用いて、目標まで全文を書き直してください。

ABとBCの間の角はBで、Cではない。二つは直角三角形で、AB,DEは斜辺。斜辺AB=DEと他の一辺BC=EFがそれぞれ等しいので、既習の直角三角形の合同条件により△ABC≡△DEF。対応する角から∠A=∠D。

直角に向かい合う斜辺の特定、元の角が二辺の間でないという診断、直角三角形の斜辺と他の一辺の条件、目標の対応角まで見る。三平方の計算を必須にしない。

△ABCで∠A=50°、∠B=60°、AB=7cm、△DEFで∠D=50°、∠E=60°、DE=11cmです。ある説明は残りの角も70°なので「三角がそれぞれ等しく、合同」としました。本人の二図を描き、合同という結論が成立しない根拠を述べてください。そのうえで、結論を「∠C=∠F=70°である」へ明示的に修正し、元の仮定からその結論まで全文を書いてください。

三角の等しさだけでは合同条件にならず、対応ABとDEも7cmと11cmで異なるので、この二つは合同でない。修正した結論について、△ABCの内角の和から∠C=180°−50°−60°=70°。同様に△DEFで∠F=180°−50°−60°=70°。したがって∠C=∠F=70°。長さの仮定を勝手に変えて合同にしない。

本人の二図、7≠11と対応する辺という根拠、角だけの合同条件はないという診断、結論の明示的変更と修正後の全論証を見る。相似の用語・三角比・未習の辺計算を要求しない。

AB=ACの三角形ABCについて∠ABC=∠ACBを示します。ある人は「底角は等しいから目標が正しい。それを使い、二角と辺から合同だとも言える」と書きました。この課題では二等辺三角形の底角の性質そのものを、三辺の合同条件から証明します。自分の図を描き、循環を指摘して、△ABCと頂点の順を入れ替えた同じ三角形を比較する全証明を書いてください。

証明対象である底角の等しさを先に使っている。△ABCと△ACBを比較すると、AB=AC、AC=ABは仮定から、BC=CBは共通。ここではABとACという異なる二本の辺が、入れ替わる対応として二組ある。三辺がそれぞれ等しいので△ABC≡△ACB。対応B↔Cから∠ABC=∠ACB。

同じ三角形を別の対応で比較できること、二つの異なる辺ABとACの入れ替えと、一本の共通辺を二回数える誤りとの違いを見る。本人の図、循環の診断、三辺の対応と底角への全証明が必須。

自分で、図と仮定・目標を決めた証明課題を一つ作ってください。意図的に根拠を一か所だけ間違えた説明も作り、どの文がなぜ使えないかを述べます。次に元の仮定を無断で増やさず、正しい全証明を書いてください。見本の点名や数値を写すだけでなく、本人が選んだ条件・結論を図へ示します。

作例：△JKLと△UVWでJK=UV=4cm、KL=VW=9cm、∠JKL=∠UVW=67°と決め、JL=UWを目標にする。誤った説明を「二辺とその間の角から△JKL≡△UWV」とする。この順はJKにUW、KLにWVが対応して条件と合わない。修正：仮定の二辺とその間の角がそれぞれ等しいので△JKL≡△UVW。対応する辺よりJL=UW。本人が別の有効な図・仮定・診断・修正を作っても認める。

本人が作った図と課題、成立する三角形と条件、誤りが具体的に一か所特定されること、仮定から成立する結論への修正後の全証明を見る。作例と同じ合同条件や点名・寸法に固定しない。