解答: 相似な立体の体積比を三乗の理由から求める

MomentDesk · https://momentdesk.com/ja/practice/explain-cubed-volume-ratios-of-similar-solids/

中3 数学

1. $\frac{8}{27}$

   体積比は2^3:3^3=8:27なのでV_A/V_B=8/27です。

2. 128

   体積比は27:64なので54×64/27=128cm^3です。

3. 128

   体積比は64:125なので250×64/125=128cm^3です。

4. 54

   体積は1.5^3=3.375倍、16×3.375=54cm^3です。

5. 12

   体積は$(1/2)^3$=1/8倍なので96/8=12cm^3です。

6. $\frac{2}{5}$

   2^3=8、5^3=125より長さの比は2:5です。

7. $\frac{9}{16}$

   長さの比は3:4であり、表面積の比は3^2:4^2=9:16です。

8. $\frac{8}{27}$

   半径も高さも2:3です。体積は24πと81πcm^3なので比は8:27です。

9. 135

   体積比は8:27なので40×27/8=135cm^3です。

10. 37

    全体4^3=64cm^3、小3^3=27cm^3なので64−27=37cm^3です。

11. 4:9

    体積は24πと54πで比4:9です。半径は変わっても高さは同じなので、相似な立体の三乗の比をそのまま使いません。

12. 表面積9:25・体積27:125

    表面積は二乗9:25、体積は三乗27:125です。

13. 1:2

    $1^3:2^3=1:8$なので長さの比は1:2です。

14. 相似や合同とは限らない

    例えば2×3×4cmと1×4×6cmはどちらも24cm^{3}ですが、全ての対応する長さの比をそろえられず相似ではありません。

記述問題の解答・確認の観点

直方体Aの三辺は2,3,5cm、相似な直方体Bの対応する三辺は6,9,15cmです。本人が自分の二つの見取図へ対応を記し、両体積と体積比を求めます。三つの長さに倍率がかかる理由を体積の式で説明し、両表面積とその比も計算して区別してください。

本人の二図で2↔6,3↔9,5↔15を対応させる。長さA:B=1:3、体積は2×3×5=30cm^3、6×9×15=810cm^3、比1:27。(3×2)(3×3)(3×5)=3^3×30で三つの倍率がかかる。表面積A=2(2×3+3×5+5×2)=62cm^2、B=558cm^2、比1:9。長さ1:3、表面積1:9、体積1:27を区別する。

本人の二立体図と三辺の対応、30/810cm^{3}の実計算と三乗の理由、62/558cm^{2}と二乗の比、三種類の比を同じ向きで確認したかを見る。

相似な二つの円柱A,Bで、半径と高さはAが3cmと4cm、Bが4.5cmと6cmです。本人が自分の見取図に底面の半径と底面に垂直な高さを書き、両体積と体積比をπを用いて求めます。半径の二乗と高さの倍率から三乗になる理由を説明してください。

本人の二図で半径3↔4.5、高さ4↔6を対応させ、両方の比2/3を確認する。V_A=π×3^2×4=36πcm^3、V_B=π×4.5^2×6=(243/2)π=121.5πcm^3。比36/(243/2)=8/27=(2/3)^3。半径は3/2倍で底面積が9/4倍、高さも3/2倍なので体積は27/8倍になる。πは比で約分する。

本人の円柱図・半径と垂直な高さの対応、両比2:3、36π/121.5πcm^{3}と8:27、底面積と高さの積で三乗を説明・確認したかを見る。

底面が円で頂点が底面の中心の真上にある円すいA,Bで、半径と底面に垂直な高さはAが2cmと9cm、Bが6cmと27cmです。二つは相似です。本人が自分の見取図へ半径と高さを記し、両体積と比を求め、公式の1/3が体積比にどう関わるか説明してください。

本人の円すい図へ半径と垂直な高さを書く。両長さの比は1:3。V_A=(1/3)π×2^2×9=12πcm^3、V_B=(1/3)π×6^2×27=324πcm^3、比1:27=(1/3)^3。共通の係数(1/3)πは比で約分し、半径の二乗と高さの三つの倍率が残る。1/3をさらに体積比へ掛け直さない。

本人の円すい図・半径と垂直な高さ、12π/324πcm^{3}の実計算、共通係数の約分と三乗の理由、長さ1:3と体積1:27の確認を見る。

半径3cmと5cmの球A,Bです。球の体積はV=(4/3)πr^{3}を使えます。本人が自分の二球の見取図へ半径を記し、両体積と体積比をπを用いて求めます。どの係数が約分され、長さの三乗が残るかを式で説明してください。

本人の二球の図へ半径3,5cmを書く。V_A=(4/3)π×27=36πcm^3、V_B=(4/3)π×125=(500/3)πcm^3。V_A/V_B=27/125=(3/5)^{3}で、共通の(4/3)πは約分する。半径の比3:5と体積の比27:125を区別し、36/(500/3)=27/125でも確認する。

本人の二球と半径、公式から36π/(500π/3)cm^{3}の実計算、共通係数と半径の三乗、同じ向きの二比と確認を見る。

相似な二つの直方体A,Bの体積は24cm³と81cm³です。Bの対応する高さは6cm、表面積は117cm²です。本人が自分の図へ対応を書き、正の長さの比、Aの高さと表面積を求めます。体積比を高さや表面積へそのまま使わず、三乗と二乗で確認してください。

本人の二直方体図でA:Bをそろえる。体積比24:81=8:27なので、$2^3:3^3=8:27$から長さの比2:3。Aの高さは6×2/3=4cm。表面積比は4:9で、Aは117×4/9=52cm²。確認は$(2/3)^3=24/81$、$(2/3)^2=52/117$。条件を満たす一例はA2×3×4cm、B3×4.5×6cm。

本人の対応する図、体積比8:27から長さ2:3へ戻す理由、Aの高さ4cmと表面積52cm²の実計算、三乗・二乗での別々の確認を見る。

一辺6cmの立方体の内部から、中心を同じにした一辺4cmの立方体を取り除きます。本人が自分の見取図で小と全体・残りを分け、両立方体と残りの体積を求めます。小:全体と小:残りの体積比をそれぞれ示し、なぜ残りへ三乗の比を直接使わないか説明してください。

本人の図で内側4cmと外側6cmを分ける。小64cm³、全体216cm³、残り216−64=152cm³。長さ比2:3、体積の小:全体=64:216=8:27。小:残り=64:152=8:19。残りは小立方体と相似な立方体ではなく、全体から小を引いて求める。64+152=216と確認する。

本人の内外と残りの図、64/216/152cm³の実計算、8:27と8:19を区別する理由、和での確認を見る。

容器の内側の形も相似な拡大で、内側の全ての対応する長さを5/4倍にします。元の容量は320mLです。本人が自分の模式図へ内側の対応と条件を書き、新しい容量をmLとcm³で求めます。外側の見た目だけで容量比を決められない理由も説明してください。

本人の図に内側の全ての長さが5/4倍で相似という条件を書く。容量は内側の体積なので$(5/4)^3=125/64$倍。320×125/64=625mL=625cm³。確認は625×64/125=320mL。外側が相似でも壁の厚さや内側が対応していなければ内側の体積比を三乗で決められない。この設問では内側の相似が明示されている。

本人の内側を示す図・相似条件、三乗125/64と625mL=625cm³の計算と逆確認、外側だけでは不足する説明を見る。

直方体Aの三辺は2,3,4cm、Bは1,4,6cmです。ある人は「どちらも体積24cm³だから相似比1:1」と言いました。本人が自分の二つの図と両体積を書き、辺の対応を入れ替える可能性も考えて、相似だと決められない理由を具体的な比で説明してください。

本人の二直方体図に三辺を書く。体積A=2×3×4=24cm³、B=1×4×6=24cm³。正の同じ倍率で対応すれば短い辺からの順は保たれるが、短い辺の比2/1=2と長い辺の比4/6=2/3は異なる。順を入れ替えても全ての辺を一つの倍率で対応させられず相似でない。体積1:1だけでは形や各辺1:1を保証しない。

本人の二立体図と両体積24cm³、短辺からの順や別対応を考慮した比の不一致、等体積から相似比1:1を結論できない説明を見る。

相似拡大で全ての対応する長さを3/2倍にし、元の体積は16cm³です。ある人は「16×3/2=24cm³が拡大後の体積」と言いました。本人が三方向の変化を示す自分の立体図を描き、式を直して体積を求め、元の比で確認してください。

本人の図で三方向がともに3/2倍になることを書く。体積は$(3/2)^3=27/8$倍なので16×27/8=54cm³。例えば元2×2×4cm、拡大後3×3×6cmなら16と54cm³で確認できる。24は倍率を一回しかかけていない。$16/54=8/27=(2/3)^3$と元の長さ比へ戻す。

本人の三方向の図、三乗と54cm³への訂正、具体的な体積の式と単位、一回だけの誤りの説明・比による確認を見る。

本人が2以上4以下の整数rと2以上5以下の整数sを一つずつ選びます。直方体Aの三辺をr,2r,3rcm、Bをsr,2sr,3srcmとした具体的な二図を描いてください。相似を確かめて各体積と長さ・体積の比を求め、三乗になる理由を本人の数値を入れた式で説明します。一般式だけでは終えません。

作例r=3,s=2ならA3×6×9cm、B6×12×18cm。本人の二図へ対応を書く。三つの比は3/6=6/12=9/18=1/2で直角も対応し、相似。体積は162cm³と1296cm³、比$1:8=(1/2)^3$。三つの長さにそれぞれ2倍がかかるため体積は8倍。別の範囲内r,sも具体図・全ての辺の対応・体積の計算と単位・二比と理由を確認する。

本人のr,sと具体的な二立体図・三辺の対応、相似の確認、両体積と単位、長さ比・三乗の体積比・本人の数値での理由を見る。