解答: 立体の断面・展開図から直角三角形を取り出して距離を求める

MomentDesk · https://momentdesk.com/ja/practice/find-spatial-distances-with-justified-sections-and-unfoldings/

中3 数学

1. 26

   $AC^2=6^2+8^2=100$。CG⊥底面なのでAC⊥CG。$AG^2=100+24^2=676$、AG=26cmです。

2. $7\sqrt{3}$ cm

   面の対角線の平方は2×7^2。さらに高さ7cmから空間の対角線の平方は3×7^2で、正の長さ$7\sqrt{3}$cmです。

3. 84

   底面対角線の平方=25+144=169。高さ$^2=85^2-169=7056$なので高さ84cmです。

4. 15

   母線が斜辺、半径と高さが直角をはさみます。高さ$^2=17^2-8^2=225$、正の高さ15cmです。

5. 5

   半径$^2=13^2-12^2=25$。半径は正なので5cmで、直径10cmとは別です。

6. $3\sqrt{7}$ cm

   底面中心から頂点までの距離の平方は$9^2+9^2=162$。高さ$^2=15^2-162=63$なので高さ$3\sqrt{7}$cmです。

7. 25

   底面中心OからMまでは7cmで、VO⊥OM。$VM^2=24^2+7^2=625$、VM=25cmです。

8. CGが底面に垂直で、ACは底面上でCGとCで交わるから

   直方体のCGは底面に垂直です。ACはその平面上でCを通るのでAC⊥CGです。

9. $\sqrt{281}$ cm

   開いた幅は9+7=16cm、高さ5cm。$PQ^2=16^2+5^2=281$なので$\sqrt{281}$cmです。指定した二面の経路です。

10. 30

    断面の幅は直径18cm、高さ24cm。$AC^2=18^2+24^2=900$なので30cmです。

11. 25

    CGは底面に垂直なのでAC⊥CG。$AG^2=15^2+20^2=625$、AG=25cmです。

12. 三辺だけでは一つに決められない

    辺の長さだけでは底面の角や垂直が分かりません。直方体の式$6^2+8^2+10^2$を無条件には使えず、距離は一つに決まりません。

13. 作れない。高さ^2=7^2−9^{2}が負になる

    軸を含む断面の半分で母線は斜辺です。高さ^2=49−81=−32では正の実数の高さがなく、この条件の直円錐は作れません。

14. 直方体の仮定と入力値に基づく計算値で、実物の形と測定誤差は別に確かめる

    3.1^2+4.0^2+12.0^2=169.61です。仮定した直方体の計算値であり、実物の垂直や測定精度を計算だけで保証しません。

記述問題の解答・確認の観点

直方体ABCD-EFGHで、底面ABCDのAB=9,BC=12cm、高さCG=20cmです。本人が元の立体と△ABC、△ACGを自分の図へ描き、ACとAGを求めます。それぞれ直角の根拠、斜辺と平方の式、正の答えと確認を書き、辺をたどる長さとも区別してください。

本人の見取図と二つの取り出した図へ対応点を書く。長方形の底面なのでAB⊥BC、AC^2=9^2+12^2=225、AC=15cm。CG⊥底面でACは底面上をCで通るからAC⊥CG。AG^2=AC^2+CG^2=225+400=625、AG=25cm。15^2+20^2=25^2、25>20も確認。三本の辺をたどる9+12+20=41cmは空間をまっすぐ結ぶ25cmとは違う。

本人の元の立体と二三角形・対応点、二つの直角の根拠と斜辺、AC15/AG25cm、二つの平方の式と確認、辺の和41cmとの区別を見る。

一辺8cmの立方体です。本人が自分の立体図に一つの面の対角線と空間の対角線を描き、それぞれ取り出す直角三角形を示して正確な長さを求めます。二つの距離が異なること、根号の式と平方による確認を書いてください。

本人の図で底面ABCD、上面EFGHとする。△ABCはBが直角でAC^2=8^2+8^2=128、AC=8√2cm。CGは底面に垂直なので△ACGはCが直角。AG^2=128+8^2=192、AG=8√3cm。(8√2)^2=128、(8√3)^2=192で、AG>AC。同じ8√2を空間の答えにしない。

本人の立方体と二つの取り出した図、直角の根拠、面8√2/空間8√3cm、平方の二段階と大小の確認を見る。

直方体の底面は12cm×16cm、空間の対角線は29cmです。本人が元の立体と必要な二つの直角三角形を自分で描き、底面の対角線と高さを求めます。高さを求める式の引き算、正の値と元の三辺での確認を示してください。

本人の図で底面の直角からd^2=12^2+16^2=400、d=20cm。高さhは底面に垂直でdと直角を作る。d^2+h^2=29^{2}からh^2=841−400=441、h=21cm。12^2+16^2+21^2=144+256+441=841=29^2、全て正である。

本人の立体・二つの補助図と直角の理由、底面20cm/高さ21cm、平方の引き算と正の長さ、三つの平方での確認を見る。

直円錐の母線は25cm、底面の半径は7cmです。本人が元の円錐と軸を含む断面、さらにその半分の直角三角形を自分で描き、高さと体積を求めます。半径と直径の違い、軸の垂直、平方と体積の式・単位を示してください。

本人の図で頂点V、底面中心O、円周点Aを置く。VOは底面に垂直、OAは底面上なので∠VOA=90°、VA25cmが斜辺、OA7cmが半径。h^2=25^2−7^2=576からh=24cm。体積=(1/3)π×7^2×24=392πcm^3。24^2+7^2=25^{2}で確認。直径14cmをこの半分の三角形の一辺にしない。

本人の円錐と軸断面・半分の図、直角と斜辺・半径、h24cm/体積392πcm^3、平方・体積の式と確認を見る。

正四角錐の頂点をV、底面の正方形の中心をO、底面の一頂点をA、一辺の中点をMとします。底面の一辺18cm、側辺VA=15cmです。本人が立体と底面の図、△VOAと△VOMを描き、高さVOと側面の高さVMを求めます。OAとOMの違い、二つの直角の根拠と平方の確認を示してください。

本人の底面図でOM=9cm、OA^2=9^2+9^2=162。VOは底面に垂直なのでVO⊥OAかつVO⊥OM。△VOAでVO^2=15^2−162=63、VO=3√7cm。△VOMでVM^2=VO^2+OM^2=63+81=144、VM=12cm。63+162=225=15^2、63+81=144=12^{2}で確認。VA15、VM12、VO3√7は別の線分である。

本人の正四角錐・底面・二つの断面図、OAとOMの区別と直角の根拠、VO3√7/VM12cm、三つの平方の式・線分対応と確認を見る。

直円柱の底面の半径は8cm、高さは30cmです。下の円の直径の一端Aと、反対側の端の真上の上円周点Cを結びます。本人が元の円柱と軸を含む断面を自分の図へ描き、線分ACを求めます。半径でなく直径を使う理由と平方での確認を示してください。

本人の元の図に対応する上下の円周点と軸断面を書く。断面は幅2×8=16cm、高さ30cmの長方形で、ACはその対角線。底面と高さは直角なのでAC²=16²+30²=256+900=1156、AC=34cm。34²=1156、34>30を確認する。幅8cmでは、直径の反対端まで届かない。

本人の円柱・対応点・長方形断面、直径16と高さ30の直角の理由、AC34cmと平方・大小確認、半径との区別を見る。

直方体の隣り合う二つの側面は横6cmと13cm、共通の高さ10cmです。この二面を共通の縦の辺で開き、左下Pから右上Qへ直線を引きます。本人が元の二面と展開図、折り目を書き、指定二面上の経路の長さを求めます。直線が折り目の範囲内を通ること、整数の間の範囲を確認し、指定外の面を含む最短とは区別してください。

本人の展開図は幅6+13=19cm、高さ10cmの長方形で、折り目はP側から6cmの位置。PQ²=19²+10²=461、PQ=√461cm。直線が折り目を横切る高さは10×6/19=60/19cmで0より大きく10より小さいから、指定二面内でつながる。21²=441<461<484=22²より21<PQ<22。これは指定二面内の直線経路で、指定外の面も含む全表面の最短とはここでは断定しない。

本人の元の隣接二面と幅19・高さ10の展開図・折り目、√461cmの式、折り目通過の範囲と21..22の確認、対象の経路範囲を見る。

辺が8,11,6cmの直方体の向かい合う頂点を、指定した二面ずつ開いた三つの経路候補で結びます。候補の長方形は(8+11)×6、(8+6)×11、(11+6)×8cmです。本人が元の立体と三展開図・対応点を描き、三候補の正確な長さ、この三候補内で最も短いもの、空間をまっすぐ結ぶ距離を計算します。平方で比較し、候補内の比較と全経路の主張を分けてください。

本人の図で隣接二面と各展開図の対応を示す。候補Iは√(19²+6²)=√397cm、IIは√(14²+11²)=√317cm、IIIは√(17²+8²)=√353cm。長さは正で317<353<397なので、この三候補ではIIの√317cmが最短。空間直線dは二段階の直角からd²=8²+11²+6²=221、d=√221cmで各候補より短い。全ての面上の全経路の最短を証明したとはせず、この三候補の比較として述べる。

本人の立体と三展開図・対応点、√397/√317/√353cmの式、正の平方でIIを選ぶ比較、空間√221cmの直角の根拠と対象範囲の区別を見る。

物体の一頂点から出る三辺の長さを7,8,9cmとする仮の情報だけで、ある人は「反対の頂点への距離は必ず√194cm」としました。本人が確かめた条件と未確認の条件を自分の図に分け、足りない直角の根拠を説明します。直方体だと追加仮定した場合の計算と確認を示し、実物の測定結果を保証した主張にはしないでください。

本人の図へ三辺7,8,9cmと未確認の角を書く。三辺の長さだけでは底面の直角も高さの垂直も保証されず、三平方の定理を二段階で使う根拠がない。直方体だと追加仮定するなら、底面対角線²=7²+8²=113、高さが底面に垂直なのでd²=113+9²=194、d=√194cm。13²<194<14²から13<d<14。仮定と計算の結果であり、元の物体の形や測定の正しさを証明したのではない。

本人の与えた三辺と未確認の角の図、足りない二つの直角の根拠、直方体という追加仮定、√194cmと範囲の計算、実物に関する断定を避けた結論を見る。

本人がaを2〜4、bを3〜5、hを4〜6の整数から一つずつ選びます。底面の二辺2a,2bcm、高さ2hcmの直方体を自分で描き、本人の数で底面対角線と空間対角線を正確に求めます。対応する二つの直角三角形・直角の根拠・実際の平方の式と単位付きの正の長さを残し、三辺の平方でも確認してください。

作例a=3,b=4,h=5なら三辺6,8,10cm。本人の立体と二つの取り出した図で、底面の直角からAC²=36+64=100、AC=10cm。高さは底面に垂直なのでAG²=100+10²=200、AG=10√2cm。6²+8²+10²=200=(10√2)²と確認する。別の条件内a,b,hでも本人の具体的な寸法・対応図・二段階の式・正の根号の答えと確認がそろえば認める。

本人が選んだa,b,hと実際の寸法、立体と二つの対応図、二つの直角の根拠、底面・空間の正確な長さと単位・平方の確認を見る。一般式や完成した数値だけを本人の作例にしない。