解答: 円周角の定理と逆で図形の関係を証明する

MomentDesk · https://momentdesk.com/ja/practice/prove-circle-relations-with-inscribed-angles-and-converse/

中3 数学

1. ∠APBと∠AQB

   同じ弧ABに対する円周角∠APB=∠AQBです。

2. 指定した弧を含まない方の開いた弧上

   頂点Pは端点とは異なり、その円周角が見込む弧を含まない方の開いた弧上です。

3. P,Qが直線ABの同じ側にある

   同じ端点A,Bに対する等しい角で、P,Qが直線ABの同じ側にあることを確認します。

4. 同じ円周上なら反対側の二角の和180°に反するため、この四点は同じ円周上にない

   P,QはABの反対側で、内接四角形なら向かい合う角の和は180°のはずです。60+60=120°なので反例です。

5. 107

   二つの内角は補い合う弧の中心角を半分にするので和180°です。180−73=107°。

6. 90

   直径OPに対する円周角なので180÷2=90°です。

7. PはABを直径とする円周上にある

   直径に対する円周角の逆です。補助点をABを直径とする円の同じ側の半円上に取り、等しい90°から逆を使えます。

8. PTはTにおける円の接線

   円周上の点Tで半径に垂直な直線は、その円のTにおける接線です。

9. ∠BAC=∠ACD

   ∠BACは弧BC、∠ACDは弧DAを見込み、二つの弧が等しいので角も等しくなります。

10. AB∥CD

    ACを横切るABとCDの錯角が等しいのでAB∥CDです。

11. DBは∠ADCを二等分する

    半直線DBは∠ADCの内側で、両側の角が等しいため二等分線です。

12. 結論を先に仮定せず、角の等しさを与えられた条件から導く

    示すべき結論を根拠にした循環です。内角の和など仮定にある別の条件から等しい角を得て、同じ側も確かめてから逆を使います。

13. ∠APBが定まらないので、端点と異なる頂点という条件を満たさない

    P=Aでは半直線PAが定まらず、円周角の頂点として使えません。四点が異なるという条件が必要です。

14. ∠AQB=90°で∠APBと等しく、頂点P,QはABの同じ側

    Qの角は直径に対する円周角で90°です。等しい角と同じ側の条件から逆を使い、Pも同じ円周上と示します。

記述問題の解答・確認の観点

中心Oの円でP,Qは指定した弧ABを含まない方の開いた弧上の異なる点です。全ての点は端点とは異なります。本人が弧と二頂点を自分の図に書き、∠APB=∠AQBを中心角との関係から証明してください。端点が同じという言葉だけで終えず、どの弧を使うかを明示します。

本人の図に指定した弧ABとその外の開いた弧上のP,Qを書く。指定した弧に対する中心角をαとする。円周角の定理より∠APB=α/2、∠AQB=α/2である。どちらも頂点を含まない同じ弧ABを見込むため、二角は等しい。反対側の弧を混ぜていない。

本人の実際の弧と頂点の図、同じ中心角αを使える条件、二つの半分の式から等しいという結論までの証明を見る。

円に内接する四角形ABCDについて、本人が円周順A,B,C,Dと二つの補い合う弧を自分の図へ書き、∠DAB+∠BCD=180°を証明してください。図を測らず、同じ端点B,Dの二つの弧に対する中心角を使います。

本人の図にAを含まない弧DCBとCを含まない弧BADを区別する。前者の中心角をαとすれば、後者は360°−αである。∠DAB=α/2、∠BCD=(360°−α)/2なので、和は180°となる。四点が円周順に異なるため、二つは四角形の向かい合う内角である。

本人の内接四角形と二弧の図、中心角の和360°、各円周角の対応と二つの式、和180°の結論までを見る。

中心Oの円の外にPを取り、OPの中点をMとします。OPを直径とする補助円が元の円と異なる二点T,Uで交わっています。本人が二つの円・中心・直径と線分を自分の図へ書き、直線PTとPUが元の円の接線であることを証明してください。円周上の点で半径に垂直な直線は接線である性質を使えます。

本人の図で元の円は中心O、補助円は中心Mで直径OP、T,Uは二円の交点と区別する。Tは補助円周上なので、直径OPに対する円周角∠OTP=90°、同様に∠OUP=90°。よってOT⊥PT、OU⊥PU。T,Uは元の円周上の点でOT,OUはその半径なので、半径に垂直なPT,PUはそれぞれT,Uで元の円に接する。

本人の二円と二中心・直径・交点の図、補助円の直径から二つの直角を導く理由、元の円の半径と接点、接線二本の結論をつなぐフル証明を見る。

異なる四点A,B,P,Qで、P,Qは直線ABの同じ側にあり、∠APB=∠AQB=54°です。本人が円を最初から仮定せず、自分の四点の図へ与えた条件を書き、四点が同じ円周上にあることを証明してください。逆のどの条件を使うかを明示します。

本人の四点の図にA,Bの直線、同じ側のP,Qと等しい54°を書く。A,Bは共通の端点、P,Qは直線ABの同じ側の異なる頂点で、二つの角は等しい。円周角の定理の逆の条件を満たすのでA,B,P,Qは同じ円周上にある。先に円周上と仮定して角を等しくしていない。

本人の円を仮定していない条件図、共通端点・同じ側・等しい角という仮定、逆の適用と同一円周上の結論を見る。

Pは直線AB上にない点で、∠APB=90°です。本人が自分の図へA,B,PとABを直径とする円を描き、Pがその円周上にあることを証明してください。必要なら、その円のPと同じ側の開いた半円上に、A,B,Pとは異なる補助点Qを取り、円周角の定理の逆を使います。

本人の図へABを直径とする円とPを書き、Pと同じ側の開いた半円上に別の点Qを選ぶ。直径に対する円周角なので∠AQB=90°。仮定∠APB=90°と等しく、P,QはABの同じ側の異なる頂点である。円周角の定理の逆からA,B,P,Qは同じ円周上にある。A,B,Qが定める円は描いた直径ABの円なので、Pもその円周上にある。

本人の直径の円・点P・必要な補助点Qの図、Qの直角の根拠、等しい角と同じ側を使う逆、既知の円にPが属する結論までを見る。

同じ円でA,B,Cがこの順に続いた弧ABC上にあり、弧AB=弧BCです。Dは残りの開いた弧上にあり、全て異なる点です。本人が等しい弧と半直線DBを自分の図に書き、DBが∠ADCの二等分線であることを証明してください。

本人の図に続く等しい弧AB,BCと、弧ABCを見込む頂点Dを書く。等しい弧に対する円周角なので∠ADB=∠BDC。BはDを含まない弧ACの途中にあるため半直線DBは∠ADCの内側にある。よってDBは∠ADCを等しい二つの角へ分ける二等分線である。

本人の等しい連続弧とD,DBの図、二つの角と各弧の対応、DBが角の内側という配置、二等分線の結論をつなぐ証明を見る。

同じ円周上をA,B,C,Dの順に並び、弧BCと弧DAは等しいものとします。本人が自分の図へ対角線ACと等しい弧を書き、AB∥CDを証明してください。等しい円周角から、どの直線を横切る錯角へ進むかを明示します。

本人の図へ円周順A,B,C,D、等しい弧BC,DA、対角線ACを書く。∠BACは弧BC、∠ACDは弧DAに対する円周角なので、等しい弧から∠BAC=∠ACD。円周順よりB,Dは直線ACの反対側であり、この二角はACを横切るABとCDの錯角である。錯角が等しいことの逆からAB∥CDと結論する。

本人の円周順とAC・等しい弧の図、二つの角と弧の対応、ACを横切る錯角という理由、平行までつないだ証明を見る。

「∠APB=∠AQBなら、P,Qが直線ABのどちら側でも四点は同じ円周上」という主張を検討します。本人がABを共有して反対側に二つの正三角形APB,AQBを描き、等しい角という条件は満たす一方で四点が同じ円周上にはないことを証明してください。図だけで終えません。

本人の図で二つの正三角形をABの反対側へ描く。正三角形の角から∠APB=∠AQB=60°で、等しい角という仮定は満たす。もし四点が同じ円周上なら、円周順の四角形APBQの向かい合う角PとQの和は180°である。しかし実際は60+60=120°で矛盾する。したがって同一円周上ではなく、逆の同じ側の条件を落とせない。

本人の反対側の正三角形の図、二角60°で仮定を満たすこと、内接なら和180°と実際120°との矛盾、主張が成り立たない結論を見る。

異なる四点A,B,P,Qで、P,Qは直線ABの同じ側、∠APB=48°、∠BAQ=∠ABQ=66°です。ある証明は「四点は同じ円周上だから∠APB=∠AQB。したがって逆から同じ円周上」としています。本人が条件図を描き、循環している箇所を説明して、仮定だけから正しいフル証明へ書き直してください。

本人の条件図へP,QがABの同じ側であることと、48°,66°,66°を書く。元の証明は示したい同一円周上を最初の根拠にしており循環している。仮定だけで△AQBの内角の和を使い、∠AQB=180−66−66=48°を得る。よって∠APB=∠AQBで、共通端点A,Bと同じ側の異なる頂点P,Qを持つ。円周角の定理の逆から四点は同じ円周上にある。

本人の条件図、先に結論を仮定した箇所の特定、内角和から48°を独立に導く式、等しい角・同じ側を使って逆へ進む証明を見る。

本人が30以上70以下の偶数aを一つ選びます。異なる二点A,Bを結ぶ線分の同じ側に、底角が両方(180−a)/2度の三角形APBと、Aの底角が(180−a)/2−10度、Bの底角が(180−a)/2+10度の三角形AQBを自分で描きます。円は仮定しません。本人の数で四つの底角と二つの頂角を計算し、点が異なり非退化であることと同じ側を確かめ、A,B,P,Qが同じ円周上にあるフル証明を書いてください。

作例a=50なら、△APBの底角は65°,65°、△AQBの底角は55°,75°である。本人の図で二つの三角形はABの同じ側に描く。頂角はそれぞれ180−65−65=50°、180−55−75=50°。底角は全て正で和が180°未満なので二つの三角形はつぶれない。Aにおける半直線APとAQの角が10°異なるのでPとQは異なり、どちらも端点ではない。等しい頂角と同じ側、共通端点から円周角の定理の逆を使い、四点は同じ円周上と結論する。別の条件内aでも本人の具体的な図・全数値・条件の確認と証明がそろえば認める。

本人が選んだ偶数a、同じ側の二つの実際の三角形、四底角と二頂角の計算、異なる点・非退化・同じ側、逆を使うフル証明と結論を見る。一般式だけでは本人の作例としない。