解答: 命題の逆を書き、自分の反例で確かめる

MomentDesk · https://momentdesk.com/ja/practice/test-converses-with-own-counterexamples-and-domain-checks/

中2 数学

1. nが偶数ならnは8の倍数

   仮定と結論を入れ替えます。否定を追加するのではありません。

2. n=6

   6は偶数で逆の仮定を満たしますが、8の倍数ではありません。3は仮定を満たさず、8と−8は両方を満たします。

3. 逆の真偽は別に確かめる必要がある

   元の向きの正しさだけから、逆の正しさは保証されません。逆も正しい場合と、そうでない場合があります。

4. Qを満たすがPを満たさない

   いま調べる命題の仮定Qは満たし、結論Pは満たさない例が必要です。

5. すべての場合には成り立たない

   一例で「すべて」を否定できます。ただし、一度も成立しないことや、別の向きの命題の偽までは言えません。

6. 三例で成立したが一般には未確認

   成功した三例という観察と、すべての場合に成り立つ証明は分けます。

7. 2×18と3×12

   どちらも面積36ですが、辺2,18と3,12は対応して等しくならず合同ではありません。面積が異なる組は仮定を満たしません。

8. $a^2=b^2$ならa=b

   等式の条件二つを入れ替えたものが逆です。否定を新たに加えません。

9. a=−2,b=2

   $(-2)^2=2^2=4$なので仮定は成立し、$-2\neq 2$なので結論は不成立です。2と3は仮定を満たしません。

10. 奇数から1を引くと偶数なので、常に成り立つ

    n+1=2k+1と書ければn=2kです。元の命題が正しいとき、逆も正しい例です。

11. できない。等しい角に向かい合う辺も等しく、正三角形になる

    二等辺三角形の性質の逆を使えば三辺が等しいので、仮定を満たすが結論を満たさない例にはなりません。

12. −4は扱う範囲外なので、この問題の反例には使えない

    反例は命題が扱う対象でなければなりません。負の整数は正の整数の範囲外です。

13. n=9

    9は3の倍数ですが6の倍数ではありません。6と12は両方を満たし、4は仮定を満たしません。

14. 逆は一般に成り立たないが、元の命題の正しさはそのまま

    反例は調べた向きを否定します。元と逆の真偽を混同しません。

記述問題の解答・確認の観点

整数nについて、元の命題を「nが12の倍数ならnは偶数」とします。仮定と結論を入れ替えて逆を書き、自分で選んだ数を逆の反例にしてください。自分の数が整数で、逆の仮定を満たし、逆の結論を満たさないことを、具体的な計算とともに説明します。

逆は「nが偶数ならnは12の倍数」。本人の例としてn=14なら、整数で14=2×7なので偶数。14=12×1+2で12の倍数ではない。よって逆は一般に成り立たない。元はn=12k=2(6k)で偶数なので正しく、この反例で元まで偽になったとは言わない。

本人が別の有効な偶数を作っても認める。逆の向き、対象の範囲、偶数である確認、12の倍数でない確認、逆の結論まで必須。数値だけでは完了にしない。

整数a,bについて「a,bがともに偶数ならa+bは偶数」という命題の逆を書いてください。本人が自分の二数を選び、和を計算して、逆の反例であることを説明します。「二数がともに偶数」の否定に何が必要かも、選んだ例で確かめてください。

逆は「a+bが偶数ならa,bはともに偶数」。例えばa=5,b=11なら和16=2×8で偶数だが、5も11も奇数で、ともに偶数という結論を満たさない。逆は一般に成り立たない。「ともに偶数である」という結論を否定するには、少なくとも一方が偶数でないことを示します。この作例では両方とも偶数でない。

逆を「両方奇数なら和が奇数」などへ変えない。本人の二数と和、逆の仮定、両方偶数という結論が成立しない根拠を見る。片方偶数・片方奇数では和が偶数にならず、この逆の反例にはならない。

整数a,bについて「a=bならa²=b²」という命題の逆を書きます。本人が異なる二数を選び、それぞれの二乗を実際に計算して、逆の反例を作ってください。負の数の二乗の符号と、二つの等式・不等式のどちらが逆の仮定と結論かを明らかにします。

逆は「a²=b²ならa=b」。本人の例としてa=−6,b=6なら、(−6)²=36、6²=36で逆の仮定は成立する。しかし−6≠6なので逆の結論は成立せず、逆は一般に成り立たない。元は同じ数を二乗するので正しく、この二数は元の仮定a=bを満たさない。

本人が0でない数と符号を変えた数などを自分で選び、二乗が等しいことと元の二数が異なることを両方示す。負号を二乗の外へ出す誤計算をしない。因数分解や平方根で一般解を求めることは必須にしない。

「正三角形なら三つの角はすべて60°」の逆を書き、成り立つかを調べてください。本人が三角形と角の条件を描き、二等辺三角形の性質の逆を証明済みとして使って、逆が一般に成り立つ理由を説明します。一つの成功図だけを、一般の理由の代わりにはしません。

逆は「三つの角がすべて60°の三角形なら正三角形」。△ABCで∠B=∠Cだから既習の性質の逆よりAB=AC。また∠A=∠BよりBC=AC。三辺がすべて等しいので定義から正三角形。これは任意の60°三角形に言える。本人の辺を例えば8とする図は説明の補助で、一般の根拠と分ける。

本人の三角形と三つの60°、等角に向かい合う辺の対応、三辺等長から定義への結論を見る。逆が正しいので、誤った反例を無理に作らせない。既習の定理の利用を認め、新たな合同証明を必ず要求しない。

二直線ACとBDがOで交わり、A,O,CとB,O,Dはそれぞれ一直線上でこの順です。隣り合う∠AOBと∠BOCの二等分線をOP,OQとします。「AC⊥BDならOP⊥OQ」の逆を書いてください。本人が元の二直線は垂直でない角を決めて図を描き、半分の角の計算から、逆の仮定を満たすが結論を満たさないことを説明します。

逆は「OP⊥OQならAC⊥BD」。本人の例として∠AOB=50°、∠BOC=130°とすれば、同じ側の隣角の和は180°。二等分線がそれぞれの角の内側にあるので∠POQ=25°+65°=90°、逆の仮定OP⊥OQを満たす。しかし元の交角は50°で90°でなく、AC⊥BDではない。よって逆は一般に成り立たない。

本人の交点と点の順序、隣り合う二角、内側の各二等分線を示す。半分の和が90°という仮定の確認と、元の角が直角でないという結論の不成立を両方書く。別の0°より大きく180°より小さい非直角の例を認める。

二つの長方形について「合同なら面積は等しい」という命題の逆を書きます。本人が辺の長さをそれぞれ決め、面積は等しいが合同ではない二つの長方形を実際に描いてください。二つの面積を計算し、合同でない理由を辺の対応で説明します。

逆は「面積が等しい長方形なら合同」。例として3×14と6×7の長方形を本人が描けば、どちらも面積42。しかし第一の辺14に対応して等しくなる辺は第二にはなく、6や7と14は等しくない。合同でなく、逆の反例になる。図を回せば対応する辺を選び直せることも含めて、長い辺・短い辺を照合する。

本人の二つの正の寸法と長方形図、二つの積が等しい確認、向きを入れ替えても合同にならない辺の比較、逆の結論まで見る。面積が違うだけの組や、寸法を回転させただけの同じ長方形を反例にしない。

正の整数nについて「nが5の倍数なら、一の位は0または5」という命題の逆を書き、成り立つ理由を説明してください。本人が一の位0と5の具体例を一つずつ作るだけでなく、十の位以上を表す0以上の整数aを使い、n=10aまたはn=10a+5から一般に示します。

逆は「一の位が0または5の正の整数nなら、nは5の倍数」。一の位0ならn=10a=5(2a)。一の位5ならn=10a+5=5(2a+1)。一の位0の場合はn>0なのでaは1以上、一の位5の場合はaは0以上の整数です。いずれも5の整数倍である。本人の例として70=5×14、135=5×27などを添えるが、二例の成功だけで一般を結論しない。正の整数なのでn=0自体は例に選ばない。

一の位の二場合を漏らさず、aの意味と範囲、文字式の5倍への書き換えを示す。逆は正しいので反例を無理に探させない。本人の二例は別の数でもよい。0以上のaと正のnを混同しない。

元の命題を「nが7より大きいならnは3より大きい」とします。その逆を書きます。まず正の整数すべてを扱う場合、本人の反例を作って二条件を確認してください。次に1、9、13の三数だけを扱う場合、同じ逆が成り立つかを三数すべての表で確かめ、前の場合との違いを説明します。

逆は「n>3ならn>7」。正の整数では例えばn=5が、5>3だが5>7でなく反例。三数だけなら、1は逆の仮定n>3を満たさず反例候補にならない。9と13はともにn>3かつn>7を満たす。この範囲の、仮定を満たすすべての数で結論も成立するので逆は正しい。5は三数の範囲外で、この場合には反例に使えない。

本人の反例と二つの大小関係、三数の表での全確認、仮定を満たさない1の扱い、5という例の範囲外性を説明する。有限の範囲を漏れなく確かめることと、無限の正整数で成功例を数個調べることを区別する。

整数nについて「nが10の倍数ならnは5の倍数」の逆を調べます。ある人は逆の反例をn=6とし、別の人はn=10としました。どちらが、どの条件を満たさず反例にならないかを確認してください。そのうえで本人が二つとは別の有効な反例を一つ作り、逆の仮定と結論を両方調べます。

逆は「nが5の倍数ならnは10の倍数」。6は5の倍数でなく、逆の仮定を満たさない。10は5の倍数かつ10の倍数で、結論も満たす成功例だから反例でない。本人の例として35なら、35=5×7で仮定を満たし、35=10×3+5で10の倍数ではない。よって逆は一般に成り立たない。

二つの不適切な候補の理由を別々に示し、本人が作った第三の数で二条件を確認する。単に6と10は違うと言うだけや、新しい数だけを記すことでは完了にしない。

本人が、整数や図形についての正しい「PならばQ」を一つ自分で作ります。仮定と結論、扱う範囲、元の命題が正しい理由を示してください。その逆「QならばP」を書き、自分の新しい反例を作って、逆の仮定は満たすが結論は満たさないことを説明します。図形を使う場合は、条件を決めた自分の図も描きます。

作例：整数nについて「nが正ならn²>0」を選ぶ。正の数どうしの積は正だから元は正しい。逆は「n²>0ならnは正」。本人の例n=−9ではn²=81>0で逆の仮定を満たすが、−9は正でなく結論を満たさない。よって逆は一般に成り立たない。本人が別の正しい元の命題と有効な反例を自作した場合も認める。

本人が選んだ元の命題の正しさ、範囲、入れ替えた逆、新しい具体例、二条件の確認、逆の結論まで見る。見本の数や点名を写すだけにせず、別の有効な構成を認める。元から偽の命題を選んだ場合は、まず元の正しさの条件を見直す。