解答: 平行四辺形になる条件を、自分の反例と比べる

MomentDesk · https://momentdesk.com/ja/practice/test-parallelogram-conditions-with-own-counterexamples/

中2 数学

1. この条件だけで必ずいえる

   二組の対辺がそれぞれ平行なので、定義から平行四辺形です。

2. 条件を満たしても平行四辺形でない場合がある

   一組だけでは足りません。ABとCDを異なる長さの水平な辺にし、ADを垂直、BCを斜めにした凸四角形を作れます。

3. この条件だけで必ずいえる

   対角線ACを加えた二つの三角形をSSSで合同にし、対応する錯角から二組の対辺がそれぞれ平行だと示せます。

4. 条件を満たしても平行四辺形でない場合がある

   対角線が等しいだけでは足りません。横と縦の対角線をともに6とし、一方は5と1、他方は3と3に分かれる凸四角形は、対角線が互いを二等分せず反例になります。

5. この条件だけで必ずいえる

   四角形の角の和360°から隣り合う角の和は180°。平行線の角の性質の逆を用いて、二組の対辺がそれぞれ平行だと示せます。

6. 条件を満たしても平行四辺形でない場合がある

   垂直だけでは、互いの中点で交わるとは限りません。水平と垂直な対角線で分かれる長さを不等にした凸四角形を反例にできます。

7. この条件だけで必ずいえる

   交点の対頂角と二組の辺による合同から、二組の対辺がそれぞれ平行だと示せます。対角線が互いを二等分する条件です。

8. 条件を満たしても平行四辺形でない場合がある

   対称軸上の二頂点からの距離を不等にした、左右対称の凸四角形などを反例にできます。一組の対角だけでは二組の対辺の平行を保証しません。

9. この条件だけで必ずいえる

   同じ一組の対辺が平行で長さも等しい条件です。対角線によるSASの合同から残る一組の平行も導けます。

10. 条件を満たしても平行四辺形でない場合がある

    一方だけの二等分では足りません。例えばAO=CO=4、BO=5、DO=3となる直交する二本の対角線の凸四角形を作れます。

11. 条件を満たしても平行四辺形でない場合がある

    異なる長さの平行な底辺と、対称な位置の等しい脚をもつ凸四角形が反例になります。同じ組について平行かつ等しい条件とは異なります。

12. 条件を満たしても平行四辺形でない場合がある

    等しい一組が非平行の凸四角形も作れます。二組の対辺がそれぞれ等しいという条件には足りません。

13. 条件を満たしても平行四辺形でない場合がある

    ABを水平、ADとBCを異なる長さの垂直な辺とすると、A,Bは直角でもCDは水平にならず、平行四辺形でない図を作れます。

14. この条件だけで必ずいえる

    四辺が等しいなら二組の対辺もそれぞれ等しいので、平行四辺形になる条件を満たします。

記述問題の解答・確認の観点

「一組の対辺ABとCDが平行なら、必ず平行四辺形になる」という主張への反例を、自分で形や座標・長さを決めて作り、凸四角形の図を描いてください。AB∥CDを満たす根拠と、残るADとBCが非平行である根拠を、それぞれ示します。見た目だけで決めません。

例：A(0,0)、B(6,0)、C(4,3)、D(0,3)。ABとCDはどちらも水平なので平行。ADは垂直ですがBCは垂直でなく、ADとBCは平行でない。条件AB∥CDを満たす一方で二組の対辺は平行にならず、反例となる。本人の別の凸四角形と根拠でもよい。

本人が決めて描いた凸四角形、指定された組の平行、もう一組の非平行という二つの確認を見る。「平行四辺形でない」だけでは反例の条件確認を省かない。

「一組の対辺ABとCDの長さが等しければ、必ず平行四辺形になる」という主張への反例を、自分の凸四角形の図で作ってください。AB=CDの等しさを対称移動や合同などで確かめ、平行四辺形ではない理由も示します。等しく見える、というだけの測定では済ませません。

例：A(0,0)、B(2,−1)、C(2,5)、D(0,4)。直線y=2の対称移動でA↔D、B↔Cと対応するのでAB=DC。ABの傾きは−1/2、CDの傾きは1/2で非平行。よって条件の等しい一組を保ちながら、平行四辺形でない凸四角形となる。

本人の図、等しい辺の根拠と、定義または必要な性質に反する根拠を見る。座標の傾きに限らず、正しい対称・合同・角の説明も認める。

「二本の対角線ACとBDの長さが等しければ、必ず平行四辺形になる」という主張への反例を、自分で凸四角形として描いてください。対角線が等しい根拠と、それでも平行四辺形でない根拠を両方示します。中点で交わることを勝手に条件へ加えません。

例：A(0,5)、B(−3,0)、C(0,−1)、D(3,0)。縦のACは6、横のBDも6で等しい。交点O(0,0)でAO=5、CO=1なのでACは二等分されない。平行四辺形の対角線は互いを二等分するという性質に反するため、平行四辺形ではない。

本人の凸四角形、対角線の長さの等しさ、互いの中点と違うことなどの否定の根拠を見る。対角線を辺と取り違えない。

「二本の対角線ACとBDが垂直なら、必ず平行四辺形になる」という主張への反例を、自分の図で作ってください。対角線の垂直と、平行四辺形でないことを別々に確かめます。直角という条件と、互いの中点で交わるという条件を混同しません。

例：A(−2,0)、B(0,3)、C(4,0)、D(0,−1)。ACは水平、BDは垂直なので直交する。しかしO(0,0)でAO=2、CO=4となり、互いの中点で交わらない。平行四辺形の対角線の性質に反するため、平行四辺形でない反例となる。

本人が作った直交する対角線と凸四角形、垂直の根拠、二等分などの必要な性質に反する根拠を確認する。

「一組の対角∠Bと∠Dが等しければ、必ず平行四辺形になる」という主張への反例を、自分の凸四角形で作ってください。等しい角は向かい合う二角です。その等しさと、平行四辺形でないことを、対称移動や角・辺・対角線などの根拠で説明します。

例：A(0,4)、B(−3,0)、C(0,−2)、D(3,0)。直線ACを軸とする対称移動でBとDが対応するので∠ABC=∠CDA。しかしABの傾き4/3とCDの傾き2/3は異なり、この一組の対辺は非平行。したがって平行四辺形でない。

本人の向かい合うB,Dの角が等しい根拠、凸四角形であること、結論を満たさない根拠を見る。隣り合う角に条件を置き換えない。

凸四角形ABCDの対角線の交点をOとします。「AO=COなら、必ず平行四辺形になる」という主張への反例を自分で作り、図を描いてください。一方の対角線がもう一方を二等分することを満たしながら、平行四辺形でない根拠を示します。BO=DOを条件に加えません。

例：A(−4,0)、B(0,5)、C(4,0)、D(0,−3)、O(0,0)。AO=CO=4なのでBDはACを二等分する。しかしBO=5、DO=3でBDは二等分されない。平行四辺形なら二本の対角線は互いを二等分するので、この凸四角形は平行四辺形でない。

本人の交点を内部にもつ二本の対角線、指定された一方の二等分、もう一方で実際に長さが異なることと結論を確認する。単にBO=DOが与えられていない、だけで非平行四辺形としない。

「AB∥CDで、AD=BCでもあれば、必ず平行四辺形になる」という主張への反例を、自分の図で作ってください。平行な組と長さが等しい組は別です。両方の条件を同時に満たすことと、それでも平行四辺形でないことを、それぞれ根拠を付けて示します。

例：A(−4,0)、B(4,0)、C(2,4)、D(−2,4)。ABとCDは水平で平行。縦の対称軸によってADとBCが対応するので長さは等しい。しかしAB=8、CD=4で対辺の長さが等しくない。平行四辺形の対辺は等しいという性質に反するため、反例となる。

本人が二つの条件をともに保った凸四角形を描くこと、同じ組の平行かつ等しい条件と区別すること、非平行四辺形の根拠を見る。

「隣り合う∠Aと∠Bの和が180°なら、必ず平行四辺形になる」という主張への反例を、自分の図で作ってください。必要なら二角をどちらも直角にして構いません。角の和という条件を満たす根拠と、二組の対辺が平行にはならない根拠を示します。

例：A(0,0)、B(4,0)、C(4,2)、D(0,4)。ABは水平でADとBCは垂直なので、A,Bの角は各90°、和180°。しかしABは水平でCDは水平でなく、ABとCDは非平行。よって条件を満たしても平行四辺形ではない。

本人の図、指定された隣り合う二角の和180°、一組の非平行の根拠を見る。二角の和だけから、二組とも平行だとしない。

今度はAB∥CDかつAB=CDという、同じ組の対辺についての条件です。自分の凸四角形の図に対角線BDを加え、この条件なら必ず平行四辺形になることを、合同と平行線の角から全部証明してください。今示す条件名を言うだけで済ませず、二組の対辺の平行まで導きます。

△ABDと△CDBで、AB=CDは仮定、BD=DBは共通、∠ABD=∠CDBはAB∥CDの錯角。二辺とその間の角がそれぞれ等しいので合同。対応する角から∠ADB=∠CBDとなり、錯角が等しいのでAD∥BC。仮定AB∥CDと合わせ二組の対辺が平行なので、定義より平行四辺形。

本人の対角線BDを示す凸四角形、三つの等しさと各根拠、対応順ABD/CDB、SAS、もう一組の平行、定義までを確認する。これは反例でなく一般の証明を行う課題。

自分で、平行四辺形になるための条件としては足りない命題を一つ作ります。条件を全部満たしても平行四辺形でない凸四角形を自分で描き、両方の根拠を示してください。その一般の命題の条件をどう強めれば必ずいえるか、強めた条件と理由も書きます。前の設問の図や数値をそのまま写すだけで済ませません。

例：「向かい合うA,Cがともに直角なら平行四辺形」とする。共通なBDの上側へ、B,Dの底角が各45°の△BADを、下側へBの角30°・Dの角60°の△BCDを作る。A=C=90°だが、四角形のB=75°、D=105°で対角が等しくなく反例。一般の条件を「さらにBも直角」と強めれば、四角形の角の和からDも直角。二組の対辺がそれぞれ平行になり、平行四辺形といえる。

本人が考えた命題と凸の反例、条件を満たす根拠と結論を満たさない根拠、条件を強めた別の一般の命題が成り立つ理由を見る。反例そのものへ矛盾する条件を後付けした図を要求せず、別の有効な命題と構成を認める。