和と積を、同じ二整数の組で確かめる

考える手がかり

$x^2+11x+24$を $(x+a)(x+b)$ へ直すには、$a+b=11$と$ab=24$を同じ二整数が満たす必要があります。積だけ、和だけで決めません。

積24の正の組を調べると、1,24は和25、2,12は14、3,8は11、4,6は10。選ぶのは3,8で、$x^2+11x+24=(x+3)(x+8)$です。

展開の四つの積はx^2、$8x$、$3x$、24。中項は$(8+3)x=11x$です。順序を入れ替えた$(x+8)(x+3)$も同じ積として認めます。

編集できる表：各行で積と和を両方見る

二整数	積	和
1 と 24	24	25
2 と 12	24	14
3 と 8	24	11
4 と 6	24	10

積24と和11を、同じ二数3,8が満たす

自分の図と式でたしかめる

同じ組の二数で和と積を実際に計算します。

選んだ二因数の積と、符号付きの展開の四つの積を残します。

候補の並べ方や因数の順序が違っても、有効な説明を認めます。

二数の和と積· 展開の四つの積

積が負のときは、和の符号も確かめる

考える手がかり

$x^2+3x-28$では、定数項が-28なので、積が-28になる二つの整数の符号は異なります。7と-4なら和3、積-28で、両方の条件に合います。

$(x+7)(x-4)$を展開すると$x^2-4x+7x-28=x^2+3x-28$。$-4x$と$+7x$の両方を書き、中項の符号を確かめます。

-7と4も積は-28ですが、和は-3で元の$+3x$と違います。因数の順序を替えることと、二数の符号を変えることは別です。

編集できる符号カード：異符号の積と中項の和

7

−4

和 7+(−4)=3

積 7×(−4)=−28

$(x+7)(x-4)=x^2+3x-28$

符号を逆にすると和は−3：積だけでは決められない

自分の図と式でたしかめる

選んだ正負の二数の和· 積を同じ行に書きます。

誤った候補でも四つの積へ展開し、どの係数が違うか示します。

符号を一つずつ元の多項式へ戻して説明します。

異符号の組· 二条件· 中項の修正

共通因数を出した後、外の因数を保持する

考える手がかり

6x²−60x+144では、先に共通な6を出して6(x²−10x+24)。内側はx²の係数が1で、和−10· 積24の二整数−4,−6を選べます。

内側x²−10x+24=(x−4)(x−6)なので、全体は6(x−4)(x−6)。外の6を途中で落とさず、最初の三項へ展開して戻します。

この教材は、内側がx²+px+qで整数a,bによる(x+a)(x+b)を探す範囲です。整数の組がない場合を、実数の全ての因数分解が不可能とは言い換えません。方程式の解を求める課題とは分けます。

編集できる式の流れ：共通因数と内側の二条件

6x²−60x+144

↓

6(x²−10x+24)

↓

6(x−4)(x−6)

外の6を保持し、内側で和−10· 積24を確かめる

自分の図と式でたしかめる

元の全項から共通因数を出す式を書きます。

内側の同じ二整数で和と積を確認し、外の因数を保持します。

全体の展開と、整数の形に限定した範囲を区別します。

共通因数· 内側の和と積· 全体の展開

C1· C2：同じ二数で和と積を確かめる

C1. $x^2+13x+36$を $(x+a)(x+b)$ の形へ因数分解してください。選んだ二つの整数の和と積を書きましょう。二つの因数を掛け、展開で出る四つの積を書いて、元の式に戻るかを確かめましょう。

解答· 理由を書く

C2. $x^2-13x+36$を因数分解してください。二数の符号を決めた理由、同じ二数の和と積、二因数の積と展開の四つの積を示します。

解答· 理由を書く

C1：二数の和と積· 因数· 展開と理由

C2：二数の和と積· 因数· 展開と理由

C3· C4：同じ二数で和と積を確かめる

C3. $x^2+5x-66$を因数分解してください。異符号の二整数を選び、和と積を同じ二数で確かめます。二因数の積と展開で出る四つの積で、中項の符号も説明してください。

解答· 理由を書く

C3：二数の和と積· 因数· 展開と理由

C4. $x^2-5x-66$に対し、ある人は $(x+11)(x-6)$ としました。その四つの積と中項を実際に示して誤りを特定し、和と積の両方が合う組へ修正してください。修正後も全て展開します。

解答· 理由を書く

C4：二数の和と積· 因数· 展開と理由

C5· C6：同じ二数で和と積を確かめる

C5. $x^2+15x+44$に対し、「3と12は和15だから$(x+3)(x+12)$」という人がいます。同じ二数の積と展開の四つの積を確かめ、正しい二条件の組と因数分解へ修正してください。

解答· 理由を書く

C5：二数の和と積· 因数· 展開と理由

C6. $4x^2+56x+180$を因数分解してください。先に全項の共通因数を残さず出し、内側の二整数の和と積を確かめます。外の因数を保持した積と、元の全項へ戻る展開も示してください。

解答· 理由を書く

C6：二数の和と積· 因数· 展開と理由

C7· C8：同じ二数で和と積を確かめる

C7. $x^2+6x+11$を、整数a,bによる $(x+a)(x+b)$ にできるか検討してください。積11となる正負の整数の組と各和を実際に書き、結論を「整数のこの形」の範囲で説明します。

解答· 理由を書く

C7：二数の和と積· 因数· 展開と理由

C8. 絶対値10以下の整数$a<0$、$b>0$で、和が4となる組を一つ選びます。積qを計算して x^2+4x+q を作り、因数分解と展開で出る四つの積を実際に書いてください。二因数の順序を替えた積も同じ式か説明します。

解答· 理由を書く

C8：二数の和と積· 因数· 展開と理由