整数の係数を、一般の式と具体表で保つ

考える手がかり

正整数7についてu=7p,v=7q、p,qを整数
とします。3u−5v=7(3p−5q)で、括弧内も整数なので7の倍数です。右の三行は検算用の見本で、三例だけを全整数の証明にしたのではありません。

一般の正整数
dでも、u=dp,v=dqなら3u−5v=d(3p−5q)です。p,qに0や負を含めても整数の和と積の性質は変わりません。倍数を表す係数は整数です。分数の係数は使えません。

対象の整数と係数、具体表、一般証明を分けて残します。例えば−147=7×(−21)も35=7×5も倍数で、0=7×0も同じ定義に入ります。

自分の図と式でたしかめる

別の二つの整数係数を選び、一般の倍数の式と具体的な二行を作ります。

括弧内の整数性と、0や負も含むことを自分の式へ戻します。

講師が示した表と、生徒が作った行· 一般の理由を分けます。

編集できる整数の係数· 値と組合せの表

p	q	u=7p	v=7q	3u−5v
−2	3	−14	21	−147
0	−1	0	−7	35
4	0	28	0	84

3u−5v=7(3p−5q)

括弧内も整数 / 0と負を含む

整数表示· 係数と一般の理由

全ての整数を尽くす場合分けを示す

考える手がかり

任意の整数nは偶数2kか奇数2k+1のどちらかです。偶数ならn²=4k²、奇数ならn²=4(k²+k)+1。kとk²+kは整数なので、平方を4で割る余りは0または1です。

これは全整数を偶奇の二場合で尽くした証明です。いくつかの正の数だけで確かめたこととは区別します。kが負でも同じ式で、例えばn=−3ならn²=9=4×2+1です。

余りは0以上で正の除数未満です。商や係数は負でもよいですが、余りを負にしません。別の正の除数で調べるときは、その余りのすべての場合と式をそろえます。

編集できる全二場合· 平方と余りの表

すべての場合	整数表示	平方を4の倍数と余りへ
偶数	n=2k	n²=4k²+0
奇数	n=2k+1	n²=4(k²+k)+1

平方を4で割る余りは0または1

kは全ての整数 / 二場合で全てを尽くす

自分の図と式でたしかめる

二場合それぞれの平方を、元の整数表示から自分で展開します。

自分の負の整数の検算を、どちらの場合へ入れたか示します。

場合を尽くした証明と、確認した具体例を別に記録します。

すべての場合· 余りの範囲と証明

二つの条件と、その積の倍数を区別する

考える手がかり

整数nが4と5の倍数ならn=4p=5q、p,qは整数です。n=5n−4n=20p−20q=20(p−q)なので20の倍数です。整数の係数まで示して一般に説明します。

一方「4と6の倍数なら24の倍数」は偽です。n=12は4×3=6×2ですが、24の倍数ではありません。前提の二条件を満たし、結論を破るので一つの反例で否定できます。

4と6には因数2の重なりがあり、二つの数をそのまま掛ける根拠はありません。0はこの主張の反例にならず、0=24×0だからです。自分の一般証明と反例の各条件を分けます。

編集できる真の条件と偽の条件の比較

条件	整数の式· 反例
n=4p=5q	n=5n−4n=20(p−q)
nは4と6の倍数	n=12=4×3=6×2 24の倍数ではない

反例は前提を満たし、結論を破る

自分の図と式でたしかめる

別の二条件を選び、成立する主張は整数の式で説明します。

偽の主張には自分の反例を作り、前提と結論を別々に確認します。

少数の成功例だけで一般の証明としないように、全体の根拠を残します。

条件· 整数の証明と反例

C1· C2：すべての場合· 整数表示と反例

C1. 正整数dと整数u,vについて、u,vがdの倍数なら2u−7vもdの倍数であることを、整数の係数で一般に証明してください。自分で0や負を含む具体例を作り、括弧内が整数である理由と、一般の証明· 検算の違いを示します。

解答· 理由を書く

C2. 任意の整数nについて、連続する二整数の平方の差 $(n+1)^2-n^2$ が奇数であることを証明してください。整数の係数を含む形へ変え、負のnと0で検算して、少数の代入だけを証明としない理由を説明します。

解答· 理由を書く

C1：整数· すべての場合と理由

C2：整数· すべての場合と理由

C3· C4：すべての場合· 整数表示と反例

C3. 整数nについて「nが偶数ならn(n+2)は4の倍数」と、その逆を調べてください。偶奇のすべての場合と整数の係数で両方向を証明し、負の整数も含む具体例へ戻して確かめます。

解答· 理由を書く

C4. 任意の整数nの平方を5で割った余りを、n=5q+r、r=0,1,2,3,4のすべての場合の表で調べてください。各平方を5の整数倍と0以上5未満の余りへ分け、取り得ない余りと、負の整数も含めて場合を尽くした理由を説明します。

解答· 理由を書く

C3：整数· すべての場合と理由

C4：整数· すべての場合と理由

C5· C6：すべての場合· 整数表示と反例

C5. 3桁の十進数N=100a+10b+c、aは1〜9、b,cは0〜9の整数です。S=a−b+cとの差から、Nが11の倍数であることとSが11の倍数であることを両方向に証明してください。固定した935と936についてNとSの判定を計算し、違いを確かめます。

解答· 理由を書く

C5：整数· すべての場合と理由

C6. 「整数nが2と9の倍数なら18の倍数」を一般に証明し、「6と9の倍数なら54の倍数」は反例で否定してください。前者は整数係数と偶奇などの根拠で18へまとめる理由を示し、後者は前提と結論を自分の具体値で確かめます。

解答· 理由を書く

C6：整数· すべての場合と理由

C7· C8：すべての場合· 整数表示と反例

C7. 友達はn=1,4,7でn^2+n+1が3の倍数になるので「任意の整数で3の倍数」としました。その主張を反例で調べ、nを3で割った余りのすべての場合から、実際にどの条件で3の倍数になるかを表と式で説明し、友達の文章を直してください。

解答· 理由を書く

C8. dを5,7から、aを−2,3から、bを−3,2から選びます。pを−1,2から、qを0,3から選んでu=dp,v=dqを作り、au+bvがdの倍数になる一般の証明と自分の具体式を残します。逆「au+bvがdの倍数ならu,vもdの倍数」は同じd,a,bの別の整数u,vで反例を作り、すべての条件を確かめてください。

解答· 理由を書く

C7：整数· すべての場合と理由

C8：整数· すべての場合と理由