整数の性質の証明と反例：余りで場合を分ける

講師用メモ・バージョン 3

正の除数dと整数の係数を保ち、0や負を一般の整数から落としません。余りは非負で除数未満です。反例は前提を満たし結論を破ることを別々に確認します。特定の記法・合同式・素数一般の定理やFermatを新たな前提にせず、正しい別証明も認めます。C8は許された32通りのうち生徒の一例と別の逆の反例を見ます。講師の見本・支援と生徒のすべての場合・整数の理由・未確認を分けます。

練習問題の解答はこの講師用メモに分けています。編集版であり、実際の授業での試用はまだ行っていません。

C1・C2：すべての場合・整数表示と反例

C1. 正整数dと整数u,vについて、u,vがdの倍数なら2u−7vもdの倍数であることを、整数の係数で一般に証明してください。自分で0や負を含む具体例を作り、括弧内が整数である理由と、一般の証明・検算の違いを示します。

解答・確認の観点：u=dp,v=dq、p,qは整数なら2u−7v=d(2p−7q)、括弧内も整数。作例d=5,u=0,v=−10なら2u−7v=70=5×14。生徒の別の正しい例も認め、0・負を含む整数表示と一般式を見る。

C2. 任意の整数nについて、連続する二整数の平方の差$(n+1)^2-n^2$が奇数であることを証明してください。整数の係数を含む形へ変え、負のnと0で検算して、少数の代入だけを証明としない理由を説明します。

解答・確認の観点：$(n+1)^2-n^2=2n+1$で、nは整数なので奇数。例えばn=−3なら4−9=−5=2×(−3)+1、n=0なら1。生徒の展開と全整数を保つ理由、別の負の検算も可。

C3・C4：すべての場合・整数表示と反例

C3. 整数nについて「nが偶数ならn(n+2)は4の倍数」と、その逆を調べてください。偶奇のすべての場合と整数の係数で両方向を証明し、負の整数も含む具体例へ戻して確かめます。

解答・確認の観点：偶数n=2kならn(n+2)=4k(k+1)で4の整数倍。奇数n=2k+1ならn+2=2k+3も奇数で、積も奇数なので4の倍数でない。よって逆も真。n=−2なら積0、n=−3なら積3などで検算。生徒の全二場合・整数性と両方向を見る。

C4. 任意の整数nの平方を5で割った余りを、n=5q+r、r=0,1,2,3,4のすべての場合の表で調べてください。各平方を5の整数倍と0以上5未満の余りへ分け、取り得ない余りと、負の整数も含めて場合を尽くした理由を説明します。

解答・確認の観点：余りはr^2を5で割った0,1,4,4,1で、取り得る余りは0,1,4、2と3は取らない。展開は$25q^2+10qr+r^2$で、各r^2の商も5の倍数側へまとめる。例r=3ならn²=5(5q²+6q+1)+4、r=4なら5(5q²+8q+3)+1。生徒の全5式と非負の余りを見る。

C5・C6：すべての場合・整数表示と反例

C5. 3桁の十進数N=100a+10b+c、aは1〜9、b,cは0〜9の整数です。S=a−b+cとの差から、Nが11の倍数であることとSが11の倍数であることを両方向に証明してください。固定した935と936についてNとSの判定を計算し、違いを確かめます。

解答・確認の観点：N−S=99a+11b=11(9a+b)で差が11の整数倍なので両方向。935はS=9−3+5=11、935=11×85で真。936はS=12、936=11×85+1で偽。Sが0や負でも整数の倍数の定義は同じ。生徒の両方向と二数の計算を見る。

C6.「整数nが2と9の倍数なら18の倍数」を一般に証明し、「6と9の倍数なら54の倍数」は反例で否定してください。前者は整数係数と偶奇などの根拠で18へまとめる理由を示し、後者は前提と結論を自分の具体値で確かめます。

解答・確認の観点：前者でn=9qが偶数ならqも偶数（qが奇数なら9qも奇数）なのでq=2k、n=18k。後者の反例n=18は6×3=9×2だが54の倍数でない。負の反例−18も可。生徒の一般証明と反例の各条件、同等な別解を見る。

C7・C8：すべての場合・整数表示と反例

C7. 友達はn=1,4,7でn^2+n+1が3の倍数になるので「任意の整数で3の倍数」としました。その主張を反例で調べ、nを3で割った余りのすべての場合から、実際にどの条件で3の倍数になるかを表と式で説明し、友達の文章を直してください。

解答・確認の観点：n=0なら1なので主張は偽。n=3q+rのr=0,1,2でn^2+n+1は順に$3(3q^2+q)+1$、$3(3q^2+3q+1)$、$3(3q^2+5q+2)+1$。従って余り1の整数nのときに限り3の倍数。生徒の三つの場合すべてと反例・全文修正を見る。

C8. dを5,7から、aを−2,3から、bを−3,2から選びます。pを−1,2から、qを0,3から選んでu=dp,v=dqを作り、au+bvがdの倍数になる一般の証明と自分の具体式を残します。逆「au+bvがdの倍数ならu,vもdの倍数」は同じd,a,bの別の整数u,vで反例を作り、すべての条件を確かめてください。

解答・確認の観点：作例d=7,a=−2,b=−3,p=−1,q=3ならu=−7,v=21、au+bv=−49=7×(−7)。一般にu=dP,v=dQならau+bv=d(aP+bQ)で係数は整数。逆の反例はu=4,v=2なら−8−6=−14は7の倍数だが4,2はそうでない。許された32通りと別の正しい反例を認め、生徒の選択・式と計算過程と前提/結論を確認する。

利用と出典表示

© 2026 MomentDesk / PRYADKO DANILA. 無料・有料の授業で利用し、自分の授業用に変更できます。共有時はMomentDeskの出典表示を残してください。テンプレートの転売や、自作としての再公開はできません。

文部科学省・数学A：数学と人間の活動・約数と倍数（冊子96〜97/PDF108〜109）— https://www.mext.go.jp/content/20260115-mxt_kyoiku02-100002620_04.pdf#page=108