余りの条件を保ち、最後の0でない数へ進む

考える手がかり

正整数238と154を、割られる数a· 正の除数b· 商q· 余りrへ分けます。a=bq+r、0≦r<bを毎行確かめ、次は(b,r)へ進みます。右の最後の割り算は70=14×5+0です。

共通の正の約数dがa,bを割り切ればr=a−bqも割り切り、b,rを割り切ればa=bq+rも割り切ります。二方向から共通約数の集合が変わらないと説明できます。

最後の組は(14,0)。0は全ての正整数で割り切れるので、この組の共通の正の約数は14の正の約数です。最大は14で、最後の余り0を最大公約数にしません。

編集できる商と余り· 238と154の表

割られる数a	除数b	商q	余りr
238	154	1	84
154	84	1	70
84	70	1	14
70	14	5	0

a=bq+r / 0≦r<b

最後の0でない余り14が最大公約数

自分の図と式でたしかめる

各行をa=bq+rへ戻し、余りがその行の除数より小さいことを確認します。

次の組で共通約数が変わらない理由を、二方向の整数の式で説明します。

手順の表を写したことと、確認した式· 止め方を分けます。

各割り算· 余りの範囲と止め方

余りの式を逆へ戻し、整数の関係を作る

考える手がかり

91=65+26、65=2×26+13、26=2×13+0より最大公約数は13です。余りの式13=65−2×26へ26=91−65を代入すると、13=−2×91+3×65です。

係数−2と3は整数で、負の係数も使えます。元の二数へ戻して−182+195=13と確認します。符号を落とした2×91+3×65は同じ値になりません。

両辺を2倍すれば26=−4×91+6×65です。これは方程式91x+65y=26の一つの整数の組を示します。この一組だけで整数解を全て列挙したことにはなりません。

編集できる余りの逆向きの代入

順序	余りを元の二数に戻す
割り算	91=65+26 / 65=2×26+13
戻る①	13=65−2×26
戻る②	13=65−2(91−65)
整数係数	13=−2×91+3×65

両辺を元の二数へ代入して確かめる

自分の図と式でたしかめる

見本を隠して、13を91と65の整数の係数の式へ戻します。

各代入の括弧と符号、最後に元の二数で計算した値を確認します。

一つの整数の組を得たことと、全ての解を求めたことを区別します。

逆向きの代入· 括弧と整数係数

最大公約数を、共通の区切りと対応させる

考える手がかり

図上の252cm×168cmの長方形を、同じ一辺の正方形で切り分けます。隙間や重なりを作らず、辺に平行な格子で並べ、両辺が一辺tの整数個分になる条件です。実物を測った記録ではありません。

252=168+84、168=2×84+0から最大公約数は84。t=84cmなら横3個· 縦2個で計6個です。辺の長さの単位cmと、個数の単位を分けます。

任意の可能なtでも252/tと168/tは正整数で、差84/tも正整数です。従って84/t≧1、t≦84となり、84cmが最大と示せます。数値を出しただけで最大という理由を省きません。

編集できる共通の区切り· 辺と個数の表

図の条件	共通の一辺と個数
長方形	252cm ×168cm
最大の一辺	84cm
辺ごとの個数	252÷84=3 / 168÷84=2

一辺t>0 / 両辺を整数個に分ける

自分の図と式でたしかめる

84cmの区切りを、横と縦の整数個に対応させます。

別の可能な一辺tが84cmより大きくならない理由を、自分の式で示します。

図の条件· 計算と、実物を切ったり測った記録を分けます。

区切りの図· 単位と最大の理由

C1· C2：商と余り· 整数の関係

C1. 正整数437と299の最大公約数を、全ての割り算の表から求めてください。各行の商と0以上で除数未満の余りを確認し、元の二数を答えで割り、最後の0ではなくどの数を答えにしたか説明します。

解答· 理由を書く

C2. a=bq+rについて、a,bの共通の正の約数とb,rの共通の正の約数が同じになることを、整数の係数で両方向に証明してください。182=2×70+42で二組の共通の正の約数を全て列挙し、一般の証明と具体例の確認を分けます。

解答· 理由を書く

C1：表全体· 元の条件と理由

C2：表全体· 元の条件と理由

C3· C4：商と余り· 整数の関係

C3. 最初の数が小さい42と105について、最初の商と余りから最後まで進めてください。別に144と36も求め、余りが最初から0の場合を説明します。割る数を0にしないことと、二組の最大公約数を元の二数で確認します。

解答· 理由を書く

C3：表全体· 元の条件と理由

C4. 136と85、また両方を3倍した408と255の最大公約数を、二つの表で求めてください。商と余りを対応させ、どの量が3倍され、どれが変わらないか、元の二数で確かめます。この二組の確認を、任意の倍率の証明と区別します。

解答· 理由を書く

C4：表全体· 元の条件と理由

C5· C6：商と余り· 整数の関係

C5. 357と255の最大公約数を、全ての割り算から求め、その値を357x+255yという整数の係数の式へ逆向きに代入してください。各代入と符号を示し、得た組を元の式で確かめます。

解答· 理由を書く

C6. C5の式を使い、357x+255y=102の一つの整数の組を作ってください。その組からxへ5を加えyから7を引いた別の組も作り、両方を元の式へ代入し、値が変わらない理由を説明します。この二組を全ての解としないようにします。

解答· 理由を書く

C5：表全体· 元の条件と理由

C6：表全体· 元の条件と理由

C7· C8：商と余り· 整数の関係

C7. 友達は128=80+48、80=48+32まで進み、最大公約数は32だと結論しました。32を元の二数で確かめ、手順を最後まで進め、止める条件と友達の文章を直してください。

解答· 理由を書く

C8. dを5,8,11から、(A,B)を(9,7),(17,11),(11,8)から一組選び、a=dA,b=dBを作ってください。全ての割り算と余りの範囲から最大公約数を求め、逆向きの代入でその値をax+byに表し、元の二数へ戻して確認します。自分の組と講師の見本を分けます。

解答· 理由を書く

C7：表全体· 元の条件と理由

C8：表全体· 元の条件と理由