同じ項になる選び方を、因数の位置から数える

考える手がかり

$(x+3)^4$は4個の同じ因数$(x+3)$の積です。x^2を作るには、異なる2位置でx、残りの2位置で3を選びます。位置に1〜4の番号を付け、同じ組を逆順で二度数えません。

選ぶ2位置は$(1,2),(1,3),(1,4),(2,3),(2,4),(3,4)$の6通りです。各積は$x^2\cdot3^2=9x^2$なので、係数は54、項全体は$54x^2$になります。

n個からm位置を順序なしで選ぶ数を$C(n,m)$と書きます。$(ax+b)^n$のx^mの係数は$C(n,m)a^mb^{n-m}$です。nは非負整数、$0\leqq m\leqq n$とし、$m=0$や$m=n$でも選び方は1通りです。組合せを既習とは仮定しません。

編集できる4因数の位置と6通りの選び方

4因数の位置：1, 2, 3, 4

選ぶ2位置：(1,2), (1,3), (1,4)

(2,3), (2,4), (3,4) → 全6通り

各積：$x^2\cdot3^2 = 9x^2$

x^2の係数：$6\times9 = 54$

位置は区別、選ぶ順番は区別しない

自分の図と式でたしかめる

選ぶ位置を列挙し、位置の違いと順序の重複を区別します。

残りの因数から選ぶ定数と累乗を残し、選び方の数だけを係数にしません。

係数の数と、文字を含む項全体を別に書いて確かめます。

位置の列挙· 各積と係数

二つの文字の指数と、負の定数の累乗を分ける

考える手がかり

独立な文字x,yについて$(3x-2y)^4$のxy^3を考えます。3xを1位置、−2yを残り3位置で選ぶ4通りです。各積は$3\times(-2)^3xy^3=-24xy^3$なので、係数は−96です。

負の定数は符号を含めて累乗します。$(-2)^3$は−8、$(-2)^2$なら4です。定数をk位置で選ぶ数え方ではxの指数はn−kで、kそのものとは限りません。

この積では各因数からx又はyを一つずつ選ぶので、各項の文字の指数の和は4です。xy^2は和が3なので対応する項がなく係数0です。勝手にy=1などへ置き換えた別の式と混同しません。

編集できる選ぶ位置· 負の累乗と指数の和

4因数 (3x − 2y) / x,yは独立

xを選ぶ1位置：1, 2, 3, 4

各積：$(3x)(-2y)^3 = -24xy^3$

$4\times(-24) = -96$

x^1y^3：指数の和1+3 = 4

x^1y^2：和が3 → 対応する項なし

自分の図と式でたしかめる

x側とy側の位置の個数と、残りの因数を示します。

負の数全体を底にして累乗し、符号と文字の指数を別に確かめます。

対応する項がない場合も、指数の和と元の積から理由を説明します。

二つの指数· 符号と存在しない項

係数表を作り、和と交互和を代入から確かめる

考える手がかり

P(x)=(x−2)⁴の各係数を、xを選ぶ位置の個数0〜4から求めます。定数項から順に16,−32,24,−8,1で、P=16−32x+24x²−8x³+x⁴です。

全係数の和は16−32+24−8+1=1です。P(1)では全てのxʲが1となるので、元の積(1−2)⁴=1から別に確かめられます。

定数項から符号を交互に付けた和は16+32+24+8+1=81です。P(−1)ではxʲが次数の偶奇で1,−1となり、(−1−2)⁴=81と一致します。二つの和だけで個別の全係数を決めたとはしません。

編集できる係数表· 和と交互和の検算

P(x) = (x−2)⁴

次数：0, 1, 2, 3, 4

係数：16, −32, 24, −8, 1

和：16−32+24−8+1 = 1

交互和：16+32+24+8+1 = 81

P(1)=1 / P(−1)=81

自分の図と式でたしかめる

全ての次数の係数を表へ残し、端の項も元の選び方へ戻します。

1と−1の代入から何の和を確かめるかを説明します。

係数全体の検算と、一つの指定係数を求める作業を区別します。

係数表· 代入の式と理由

C1· C2：位置· 累乗と係数の根拠

C1. 6個の因数(x+2)に左から1〜6の番号を付けます。$(x+2)^6$のx^2を作る2位置を、順序を区別せず全て列挙してください。重複を除く理由、残りの因数から選ぶ定数、各積、係数と項全体を実際に書いて導きます。

解答· 理由を書く

C2. $(3x-1)^5$のx^3の項とx^2の項を、因数の位置の選び方からそれぞれ導いてください。二つの定数の累乗と符号が違う理由、係数と項全体を分けて説明します。

解答· 理由を書く

C1：位置· 各積· 係数と理由

C2：位置· 各積· 係数と理由

C3· C4：位置· 累乗と係数の根拠

C3. 独立な文字x,yについて$(2x-3y)^4$を考えます。x^2y^2の係数を位置の選び方から導き、x^2yの係数も理由とともに示してください。二つの文字の指数を元の積に対応させ、勝手にyへ数値を代入しません。

解答· 理由を書く

C3：位置· 各積· 係数と理由

C4. aは正の実数です。$(ax+1)^4$のx^2の係数が96になるaを、係数の式と与えられた範囲から求めてください。候補を元の式へ戻して確認し、正という条件を外した場合の候補も比較します。

解答· 理由を書く

C4：位置· 各積· 係数と理由

C5· C6：位置· 累乗と係数の根拠

C5. $P(x)=(2x-1)^3$です。因数の位置の選び方から定数項からx^3までの係数表を実際に作ってください。全係数の和と定数項から交互に符号を付けた和を求め、$P(1)$,$P(-1)$から別に確かめる理由を説明します。

解答· 理由を書く

C5：位置· 各積· 係数と理由

C6. $(3x+1)(x-2)^3$のx^2の係数を、追加の因数からの二つの寄与に分けて求めてください。どの二つの項の積がx^2になるか、内側の必要な係数と完全な項を実際に書きます。正しい全展開による別解も認めます。

解答· 理由を書く

C6：位置· 各積· 係数と理由

C7· C8：位置· 累乗と係数の根拠

C7. $(2x-2)^5$のx^2の係数について、友達Iは「$10\times2^2\times(-2)=-80$」、友達IIは「係数は$-320x^2$」としました。二つを別々に全文で直し、位置の選び方、残りの定数の累乗、係数と項の区別を説明してください。

解答· 理由を書く

C8. nを3,4,5から、aを1,3から、bを−3,2から一つずつ選び、$(ax+b)^n$という具体的な例を作ります。自分のx^3の係数と項全体を、選ぶ3位置と残りの因数、順序の重複を除く理由から導いてください。許された全12条件を解く必要はありません。

解答· 理由を書く

C7：位置· 各積· 係数と理由

C8：位置· 各積· 係数と理由