円内では、弦の両側と相似の対応をそろえる

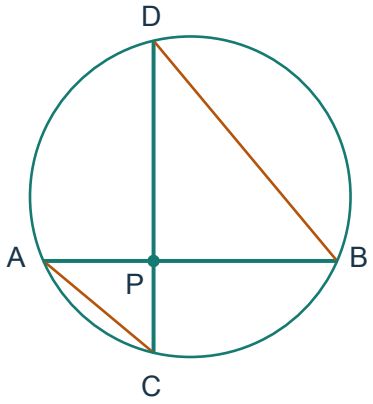
考える手がかり

同じ円周上の異なる四点A· B· C· Dをとり、異なる弦AB· CDが円内のPで交わります。A· P· B、C· P· Dの順で、長さは全て正です。

△PACと△PDBで、∠APC=∠DPBは対頂角、∠PAC=∠PDBは同じ弧BCの円周角です。相似の対応P↔P、A↔D、C↔BからPA/PD=PC/PB、従ってPA×PB=PC×PDです。

見本PA=6、PB=10、PC=5なら6×10=5×PDよりPD=12。弦全体はAB=16、CD=17で、部分どうしの積60とは別です。図の直交はこの見本の配置で、相似の証明の仮定には要りません。

編集できる円· 二つの弦と相似の対応



A· P· B / C· P· D

PA=6, PB=10, PC=5

△PAC ∽ △PDB

P↔P, A↔D, C↔B

6/PD = 5/10

PD=12 / 6×10=5×12

自分の図と式でたしかめる

四点· 円内の交点· 実際の弦の組と順序を自分の図へ記録します。

二角の理由、頂点の対応、辺の比、積の関係を順につなぎます。

長さの和· 積を区別し、正の長さと元の図の順序へ戻して確認します。

点の順序· 二角· 対応とフル証明

円外では、外側· 内部部分· 全体を読み分ける

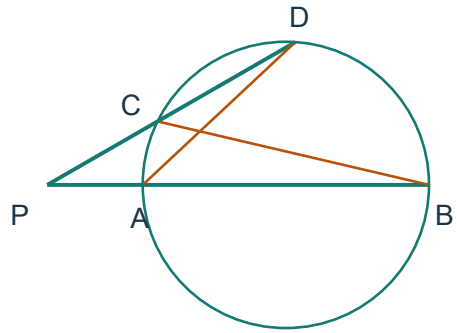
考える手がかり

同じ円外のPから二本の異なる割線を引き、P· A· B、P· C· Dの順とします。△PDAと△PBCではPの角が共通で、∠PDA=∠PBCは同じ弧ACの円周角です。

相似の対応P↔P、D↔B、A↔CからPD/PB=PA/PC、従ってPA×PB=PC×PDです。円外のPB· PDはPから遠い交点までで、円の内部部分AB· CDではありません。

見本PA=3、AB=9、PC=4ならPB=12。3×12=4×PDよりPD=9、CD=9−4=5です。4×(4+5)=36でも確かめ、正の長さとP· C· Dの順を保ちます。

編集できる二本の割線：近い点と遠い点



P· A· B / P· C· D

PA=3, AB=9, PC=4

PB=3+9=12

3×12 = 4×PD

PD=9 / CD=9−4=5

外側 × 遠い交点までの全体

自分の図と式でたしかめる

Pから各交点までの長さと、円内だけの部分を自分の図に区別します。

相似の二角と対応を記録し、全体を使う比と積を示します。

未知の全体から内部部分を求め、元の二つの外側×全体へ戻します。

外側· 内部· 全体と対応の証明

接点の直角から、接線と割線を同じ量に戻す

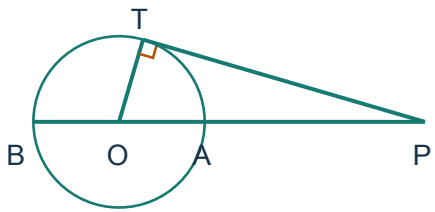
考える手がかり

中心O、半径7の円の外にPがありOP=25、PTはTでの接線です。OT⊥PTなので直角三角形OTPの斜辺はOPです。$PT^2=25^2-7^2=576$、正の長さからPT=24です。

直線OPと円の近い交点A· 遠い交点Bでは、PA=25−7=18、PB=25+7=32。PA×PB=(25−7)(25+7)$=25^2-7^2=576=PT^2$です。

同じ円と同じ円外のPでは、他の割線の外側×全体も同じ積になります。接点での垂直と円周上という条件を使い、接線らしい見た目や二つの等しい長さだけで接線と決めません。

編集できる接線· 半径· 直角と直径方向



半径7 / OP=25

PTはTでの接線

OT⊥PT → $PT^2=25^2-7^2$

PT=24（正の長さ）

PA=18, PB=32

$18\times32=576=24^2$

自分の図と式でたしかめる

接点と半径· 接線の条件、直角と斜辺を自分の図に示します。

正の接線の長さを求め、直径方向の近い点· 遠い点までを区別します。

和と差の積を展開して同じ量へ戻し、同じ円· 同じ外点という条件を残します。

接点の直角· 正の長さと二乗の理由

C1・C2：点の順序・対応と理由

C1. 同じ円内で異なる弦AB・CDがPで交わり、A・P・B、C・P・Dの順です。PA=7、PC=6、PD=14です。自分の図で二角の理由・相似の対応・比から積を導き、PB・AB・CDを求めてください。正の部分と全体、元の順序も確かめます。

解答・理由を書く

C2. 同じ円周上の異なる四点R・S・U・Vで、異なる弦RS・UVが内部のXで交わり、R・X・S、U・X・Vの順です。XR=5、XS=18、XU=9です。実際の弦の組を図示し、二つの三角形・二角・対応・比からXVを求め、元の関係で確かめてください。

解答・理由を書く

C1：図・仮定・対応・式と理由

C2：図・仮定・対応・式と理由

C3· C4：点の順序· 対応と理由

C3. 同じ円外のPからP· A· B、P· C· Dの順に二本の異なる割線を引き、PA=4、AB=14、PC=6です。外側· 内部· 全体を図で区別し、相似の二角と対応からPD· CDを求めてください。二つの外側×全体で確かめます。

解答· 理由を書く

C4. 同じ円外のPからP· A· B、P· C· Dの順に二本の異なる割線を引き、PA=x、AB=10、PC=3、CD=5です。自分の図で全体をxから表し、相似に基づく式を立ててPA· PBを求めてください。方程式の二つの候補と、長さに使える条件、元の積の検算を説明します。

解答· 理由を書く

C3：図· 仮定· 対応· 式と理由

C4：図· 仮定· 対応· 式と理由

C5· C6：点の順序· 対応と理由

C5. 中心O、半径15の円の外にPがありOP=17、PTはTでの接線です。接点の直角と斜辺を図に示し、PTを求めてください。直線OPの近い交点A· 遠い交点Bまでの長さとABも示し、差の積からPA×PB=PT²を導きます。

解答· 理由を書く

C6. 同じ円外のPからの二本の接線PT· PUについて、半径と斜辺を図に加えて直角三角形の合同からPT=PUを証明します。次に半径3、OP=7の別の図で、OPに垂直な直径の両端を新たなT· Uとしてください。PT=PUでも接線ではないことを、等距離と接点での垂直を分けて証明します。長さの平方根を求める必要はありません。

解答· 理由を書く

C5：図· 仮定· 対応· 式と理由

C6：図· 仮定· 対応· 式と理由

C7・C8：点の順序・対応と理由

C7. 二人の主張を自分の別々の図で直します。I：同じ円外のPからP・A・B、P・C・Dの割線でPA=5、AB=7、PC=6だから5×7=6×CDとする。II：直交する二直線でA・P・C、B・P・Dの順、PA=2、PC=3、PB=9、PD=6なのでPA×PB=PC×PDから四点は同じ円周上とする。Iは正しい全体と内部部分を求め、IIは実際の弦の組から反例を説明してください。

解答・理由を書く

C8. (r,d)を(5,13)か(20,29)から一組、kを1,2,3から一つ選び、中心O、半径kr、OP=kdの図を作ります。OPを直径とする補助円との交点をOPの上側か下側の一方で選んでTとし、OTとPTを結んでください。自分の選んだ図で接線である理由、PT・近いAまで・遠いBまでの正の長さ、割線の積と接線の二乗を示します。全12通りを解く必要はありません。

解答・理由を書く

C7：図・仮定・対応・式と理由

C8：図・仮定・対応・式と理由