全ての係数をそろえ、任意のxに戻す

考える手がかり

A(x+1)²+B(x−2)+C=3x²−x+2が、実数xについての恒等式となる定数を求めます。一つのxの値で合う条件だけと、全てのxで成り立つ条件を分けます。

左辺をAx²+(2A+B)x+(A−2B+C)へ展開します。同じ次数の全係数からA=3、B=−7、C=−15です。求めた三数を元の式に戻し、途中の全ての符号を確かめます。

3(x+1)²−7(x−2)−15=3x²−x+2は分配法則から全ての実数xで成り立ちます。x=0での2という値の一致は追加の確認です。証明したい等式自体を無根拠に使って、差が0だとはしません。

編集できる係数の対応と証明の結論

A(x+1)² + B(x−2) + C

= Ax² + (2A+B)x + (A−2B+C)

A = 3 / 2A+B = −1

A−2B+C = 2

A = 3 / B = −7 / C = −15

全係数の一致 / x=0の検算は別

自分の図と式でたしかめる

自分の全ての積と係数の三式を、元の等式に対応させます。

求めた三つの数を元の式に代入して、式全体を確かめたかを見ます。一つの値だけの検算とは区別します。

xが任意という結論と、使った計算法則を自分の言葉で残します。

全係数· 理由と任意の値での結論

条件を使う箇所を残し、0になり得る因数で割らない

考える手がかり

実数u,vがu+2v=6を満たすとき、u²−4v²=6(u−2v)を示します。左辺を因数分解し、途中のu+2vを条件から6へ置きます。

u²−4v²=(u−2v)(u+2v)=6(u−2v)。u−2vで割らずに証明できるので、u=3,v=3/2のようにこの因数が0になる場合も含みます。

差を計算する方法なら(u−2v)(u+2v−6)=0です。条件を外したu=1,v=0では左辺1、右辺6で異なります。この例は条件付きの結論を否定するのではなく、無条件の主張との違いを示します。

編集できる条件の代入と、割らない証明

条件：u + 2v = 6

u² − 4v² = (u−2v)(u+2v)

= 6(u−2v) / 条件をここで使う

u=3, v=3/2 でも両辺0

差 = (u−2v)(u+2v−6)

条件外u=1,v=0：左1 / 右6

自分の図と式でたしかめる

どの等号の変形で元の条件を使ったかを、自分で確かめます。

0になり得る因数を割らず、許された全ての場合を残します。

条件外の反例と、条件を満たす範囲での証明を分けます。

条件· 全証明と0の因数の扱い

比例式の根拠と、新しい分母を別に調べる

考える手がかり

元の条件はa/b=c/d、b≠0,d≠0です。新しくb−d≠0も仮定します。
示す式は(2a−2c)/(b−d)=2a/b。元の条件からad=bcを使います。

b(2a−2c)−2a(b−d)=2ad−2bc=0。bとb−dが0でないので、積の一致から二つの分数の値が等しいといえます。aやcが0の場合まで除外しません。

a=6,b=3,c=2,d=1では元の比は2、新しい左辺も2a/bも4です。一方a=c=2,b=d=1では元の比は2ですが、新しい左辺は0/0となり未定義です。元の分母だけの確認では足りません。

編集できる積の差· 元の条件と新しい条件

a/b = c/d / b≠0, d≠0

新しい条件：b−d ≠ 0

b(2a−2c) − 2a(b−d)

= 2(ad−bc) = 0

分子a,cは0でもよい

b=d=1, a=c=2：新しい比は未定義

自分の図と式でたしかめる

自分で元の比例式の条件とad=bcを結びます。

自分の新しい分母と積の全項· 0でない根拠を分けます。

0の分子を許す場合と、0/0という未定義を区別します。

全分母· 積の差と結論の範囲

C1· C2：式と計算過程· 条件と証明

C1. $A(x+2)^2+B(x-1)+C=4x^2+3x-2$を、実数xについての恒等式にします。全ての係数を比べて三数を決め、元の式に戻してください。x=0の追加の確認と、任意のxで成り立つ理由を分けます。

解答· 理由を書く

C2. $(a+3b)^2+(3a-b)^2=10(a^2+b^2)$を、自分で左辺の展開と両辺の差という二つの方法で示してください。全項と理由を残し、a=2,b=1の確認は一般の証明と分けます。

解答· 理由を書く

C1：式と計算過程· 条件· 場合分けと理由

C2：式と計算過程· 条件· 場合分けと理由

C3· C4：式と計算過程· 条件と証明

C3. 条件$x+y=-2$の下で、$x^2-y^2=-2(x-y)$を自分で証明してください。$x=y=-1$も含む理由を書き、条件外の$x=1,y=0$で両辺を比べて、成立する範囲を説明します。

解答· 理由を書く

C4. $x^2-y^2=-3(x-y)$を満たす実数対を、自分で全ての条件で表してください。友達の「$x-y$で割ればx+y=-3だけ」を直し、$x=y=0$と$x=-1,y=-2$を元の等式で確かめます。

解答· 理由を書く

C3：式と計算過程· 条件· 場合分けと理由

C4：式と計算過程· 条件· 場合分けと理由

C5· C6：式と計算過程· 条件と証明

C5.
a/b=c/dでb,dは0ではありません。(a+3c)/(b+3d)=a/bを結論するための新しい条件を自分で示し、積の差から証明してください。b=3,d=−1,a=6,c=−2では何が起きるかを、元の二比と新しい式で比べます。

解答· 理由を書く

C6. x−y+z=0の下で$x^3-y^3+z^3=-3xyz$を、自分で一文字の置き換えと全展開で示してください。$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$を使えます。x=2,y=5,z=3で条件と両辺も確認します。

解答· 理由を書く

C5：式と計算過程· 条件· 場合分けと理由

C6：式と計算過程· 条件· 場合分けと理由

C7· C8：式と計算過程· 条件と証明

C7. P(x)=ax+bでP(0)=−1、P(2)=5です。係数を決めてP(x)を求めてください。G(x)=3x−1+x(x−2)の値をx=0、2、1で求めます。x=0と2で値が一致してもGとPが同じ式ではない理由を、Pが一次式であるという条件から説明してください。

解答· 理由を書く

C7：式と計算過程· 条件· 場合分けと理由

C8. sを2,4,6から、kを1,3から、y_0を0,2から一つずつ選びます。条件$x+ky=s$で$x^2-k^2y^2=s(x-ky)$を、選んだ具体的な式と計算過程で証明してください。$y=y_0$のときのxと両辺、条件外x=1,y=0の両辺を比べます。全12条件を解く必要はありません。

解答· 理由を書く

C8：式と計算過程· 条件· 場合分けと理由