恒等式と条件：全ての値・場合分け・証明

講師用メモ・バージョン 3

生徒の全係数と全展開、条件を使う箇所・元と新しい分母が0でないことを別に記録します。0になり得る因数で割って場合を落とさず、「または」の重なりも認めます。条件外の反例を、条件を満たす場合の結論への反例とはしません。一次以下という制限と、次数を制限しない式を分けます。許された12条件から生徒が一例を選び、全例を強制しません。講師の見本・支援と生徒の根拠、未確認を分けます。実際の授業での試用・学習効果は未確認です。

練習問題の解答はこの講師用メモに分けています。編集版であり、実際の授業での試用はまだ行っていません。

C1・C2：式と計算過程・条件と証明

C1. $A(x+2)^2+B(x-1)+C=4x^2+3x-2$を、実数xについての恒等式にします。全ての係数を比べて三数を決め、元の式に戻してください。x=0の追加の確認と、任意のxで成り立つ理由を分けます。

解答・確認の観点：左辺$=Ax^2+(4A+B)x+(4A-B+C)$。$A=4,B=-13,C=-31$。$4(x+2)^2-13(x-1)-31=4x^2+3x-2$へ全項を戻す。x=0では$16+13-31=-2$。生徒の三式と全展開を見る。

C2. $(a+3b)^2+(3a-b)^2=10(a^2+b^2)$を、自分で左辺の展開と両辺の差という二つの方法で示してください。全項と理由を残し、a=2,b=1の確認は一般の証明と分けます。

解答・確認の観点：左辺$=(a^2+6ab+9b^2)+(9a^2-6ab+b^2)=10a^2+10b^2$。差でも全係数が0。a=2,b=1では$25+25=50$、右辺$10(4+1)=50$。生徒の二つの全計算と、任意の実数で使える法則を見る。

C3・C4：式と計算過程・条件と証明

C3. 条件$x+y=-2$の下で、$x^2-y^2=-2(x-y)$を自分で証明してください。x=y=−1も含む理由を書き、条件外のx=1,y=0で両辺を比べて、成立する範囲を説明します。

解答・確認の観点：$(x-y)(x+y)=-2(x-y)$へ条件を使う。割らないためx=y=−1でも両辺0で含む。条件外x=1,y=0は左1、右−2で異なる。生徒の条件の使用箇所と全範囲・例の区別を見る。

C4. $x^2-y^2=-3(x-y)$を満たす実数対を、自分で全ての条件で表してください。友達の「x−yで割ればx+y=−3だけ」を直し、x=y=0とx=−1,y=−2を元の等式で確かめます。

解答・確認の観点：差は$(x-y)(x+y+3)$。よってx=yまたはx+y=−3。x=y=0は両辺0だが和0で、落としてはいけない。−1,−2は左−3、右−3。x≠yだけなら割って和−3を導ける。生徒のすべての場合と、重なりも許す「または」を見る。

C5・C6：式と計算過程・条件と証明

C5. a/b=c/dでb,dは0ではありません。(a+3c)/(b+3d)=a/bを結論するための新しい条件を自分で示し、積の差から証明してください。b=3,d=−1,a=6,c=−2では何が起きるかを、元の二比と新しい式で比べます。

解答・確認の観点：新しくb+3d≠0が必要。$b(a+3c)-a(b+3d)=3(bc-ad)=0$で証明する。指定例の元の二比は2だが、新しい分母と分子は0で0/0は未定義。a=c=0自体を一律に除外しない。生徒のすべての条件と積の全項を見る。

C6. x−y+z=0の下で$x^3-y^3+z^3=-3xyz$を、自分で一文字の置き換えと全展開で示してください。$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$を使えます。x=2,y=5,z=3で条件と両辺も確認します。

解答・確認の観点：z=y−x。左辺$=x^3-y^3+(y-x)^3=3x^2y-3xy^2=3xy(x-y)=-3xyz$。例は2−5+3=0、左8−125+27=−90、右$-3\times2\times5\times3=-90$。生徒の三乗の全項と元の条件への戻しを見る。

C7・C8：式と計算過程・条件と証明

C7. P(x)=ax+bでP(0)=−1、P(2)=5です。係数を決めてP(x)を求めてください。G(x)=3x−1+x(x−2)の値をx=0、2、1で求めます。x=0と2で値が一致してもGとPが同じ式ではない理由を、Pが一次式であるという条件から説明してください。

解答・確認の観点：b=−1,2a+b=5からa=3、P=3x−1。G(0)=−1,G(2)=5だがG(1)=1、P(1)=2。G=x²+x−1は二次で、最初の一次以下という制限とは異なる。生徒の係数と式と計算過程・三値と比較を見る。

C8. sを2,4,6から、kを1,3から、y_0を0,2から一つずつ選びます。条件x+ky=sで$x^2-k^2y^2=s(x-ky)$を、選んだ具体的な式と計算過程で証明してください。$y=y_0$のときのxと両辺、条件外x=1,y=0の両辺を比べます。全12条件を解く必要はありません。

解答・確認の観点：作例s=4,k=3,y_0=2は条件x+3y=4で、(x−3y)(x+3y)=4(x−3y)。x=−2のとき左4−36=−32、右4(−2−6)=−32。条件外1,0は左1、右4。一般の差は(x−ky)(x+ky−s)で、0になり得るx−kyを割らない。生徒の別の正しい選択も認める。

利用と出典表示

© 2026 MomentDesk / PRYADKO DANILA. 無料・有料の授業で利用し、自分の授業用に変更できます。共有時はMomentDeskの出典表示を残してください。テンプレートの転売や、自作としての再公開はできません。

文部科学省・数学II：等式を論理的に考察し証明する（冊子54・56/PDF66・68）— https://www.mext.go.jp/content/20260115-mxt_kyoiku02-100002620_04.pdf#page=68