見つけた一つの解から、残りの因数へ進む

考える手がかり

F(x)=x³−4x²−7x+10でF(1)=0です。因数定理からx−1で割り切れます。商と余りを求め、元のFの全ての係数へ戻して確かめます。

商はx²−3x−10、余り0。F=(x−1)(x−5)(x+2)です。積が0なら、いずれかの因数が0なので、実数解は−2,1,5。見つけた1だけで終えません。

自分で商の全項と各場合を残します。三つの数を代入して0となる確認に加え、因数分解した積から、他の実数解がない理由も説明します。

編集できる除法· 因数と全ての場合

F(1)=0 → 因数は x−1

F = (x−1)(x²−3x−10)

= (x−1)(x−5)(x+2)

x−1=0 または x−5=0

または x+2=0

全ての実数解：−2, 1, 5

自分の図と式でたしかめる

自分の割り算の商と余りを、元の全係数へ戻します。

それぞれの因数を0とおく場合を「または」で結び、自分の言葉で説明します。

代入で合う確認と、他の解を落としていない理由を分けます。

全除法· すべての因数· 全ての実数解

重解と、実数解のない因数を分ける

考える手がかり

H=x³−2x²−7x−4=(x+1)²(x−4)です。同じ因数が二つあっても、異なる実数解は−1,4の二つです。三次だから異なる実数解が三つとは限りません。

J=x³+2x²+9x+18=(x+2)(x²+9)では、実数xの二乗は0以上なのでx²+9>0。実数解は−2だけです。ここでは複素数の解を求めません。

自分で式を全展開して因数分解を確かめ、各因数の解を元の式へ戻します。重なった値を一度だけ書くことと、解のない因数の理由を別々に残します。

編集できる重なり· 実数の範囲

H = (x+1)²(x−4)

= x³−2x²−7x−4

異なる実数解：−1, 4

J = x³+2x²+9x+18

= (x+2)(x²+9)

x²+9>0 → 実数解は−2だけ

自分の図と式でたしかめる

自分で同じ値の重なりと、異なる解の個数を区別します。

実数という範囲を残し、二乗が負にはならない理由を示します。

係数の戻しと、元の式への代入の両方を自分で行います。

重解· 実数の範囲と全検算

t=x²の条件を残して、xの全ての解に戻す

考える手がかり

2x⁴−5x²−3=0をt=x²と置くと、2t²−5t−3=(2t+1)(t−3)=0。実数xではt≥0なので、t=−1/2は使えずt=3だけを残します。

x²=3に戻すとx=√3またはx=−√3。両方が元の式を満たします。tの解を書いた段階と、元のxの全ての実数解を求めた段階を分けます。

別の式x⁴−9x²=x²(x²−9)=0なら、x=0も解です。x²で無条件に割って0を落とさず、±3と合わせて−3,0,3を残します。

編集できる置き換え· 非負条件と戻し

t=x² / 実数xでは t≥0

2t²−5t−3 = (2t+1)(t−3)

t=−1/2 は除外 / t=3

x²=3 → x=√3 または −√3

別の式：x⁴−9x²=x²(x²−9)

x²で割らない → −3, 0, 3

自分の図と式でたしかめる

自分で置き換えた文字の条件を、各候補へ当てます。

元のxへ戻し、正負の両方と代入の確認を残します。

0になり得る式で割る前に、0の解を別に調べます。

tの条件· xへの戻しと0の確認

C1· C2：因数と全ての実数解

C1. $F(x)=x^3-3x^2-4x+12$で$F(3)=0$です。$x-3$で割った商と余りを求め、残りを因数分解して全ての実数解を示してください。展開して元の式に戻ることと、各解の代入で確かめます。

解答· 理由を書く

C2. $F(x)=3x^3-5x^2-12x+20$で$F(2)=0$です。$x-2$で割った商と余りから、全ての実数解を求めてください。各因数が0となる場合と、元の式への戻しを残します。

解答· 理由を書く

C1：商· すべての因数· すべての場合と検算

C2：商· すべての因数· すべての場合と検算

C3· C4：因数と全ての実数解

C3. $F=x^3+4x^2-3x-18$を因数分解し、全ての異なる実数解を自分で示してください。「三次なので異なる実数解は必ず三つ」という友達の説明を、この式のすべての因数と代入を根拠に直します。

解答· 理由を書く

C3：商· すべての因数· すべての場合と検算

C4. $H=x^3-5x^2+4x-20$を、自分で項をまとめて因数分解し、全ての実数解を求めてください。二次の因数についても、実数の範囲で解があるか理由を述べ、元の式へ戻します。

解答· 理由を書く

C4：商· すべての因数· すべての場合と検算

C5· C6：因数と全ての実数解

C5. $2x^3-18x=0$で、友達は両辺を$2x$で割り、解は-3と3だけだと言いました。全ての実数解を元の式から求め、友達が落とした場合と、割れる範囲を説明してください。

解答· 理由を書く

C6. $x^4-5x^2-6=0$を、自分で$t=x^2$と置いて解いてください。tの条件、全てのtの候補、元のxの全ての実数解を分け、各候補を残す又は除く理由と代入を示します。

解答· 理由を書く

C5：商· すべての因数· すべての場合と検算

C6：商· すべての因数· すべての場合と検算

C7· C8：因数と全ての実数解

C7. $3x^4-13x^2+4=0$を、自分で$t=x^2$と置いて全ての実数解まで求めてください。二次式のすべての因数、tの条件、xに戻す正負と、元の式への二種類の二乗値の代入を残します。

解答· 理由を書く

C8. aを−3,0,2から、bを−2,1から、cを4,6から一つずつ選びます。$F=(x-a)(x-b)(x-c)$を全展開し、x−aで割った商と余り、全ての実数解を求めてください。三つの解とx=1を元の展開式へ代入して確かめます。12条件全てを解く必要はありません。

解答· 理由を書く

C7：商· すべての因数· すべての場合と検算

C8：商· すべての因数· すべての場合と検算