平方完成の右辺から、円がある条件に戻す

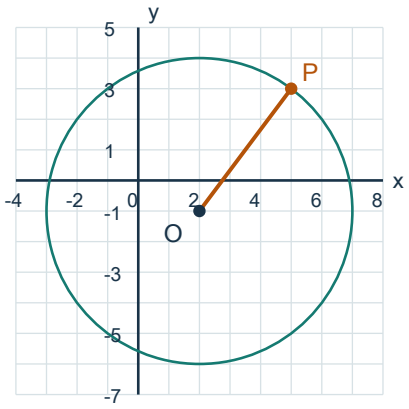
考える手がかり

$x^2+y^2-4x+2y-20=0$は、$(x-2)^2+(y+1)^2=25$です。中心$O(2,-1)$、半径は正の5。$P(5,3)$では$3^2+4^2=25$となり、円上にあります。

中心の符号と、半径の二乗25· 半径5を分けます。直交する両軸の単位をそろえ、中心から同じ距離5の点の集合として図と式を対応させます。

平方完成の右辺が0なら一つの点だけ、負なら実数の点はありません。ここではその二つを、正の半径の円とは呼びません。自分の全ての平方完成と、元の式への代入を残します。

編集できる同じ単位の軸· 中心と半径



$O(2,-1)$

半径5

$P(5,3)$

$(3)^2+(4)^2=25$

$x^2+y^2-4x+2y-20=0$

$(x-2)^2+(y+1)^2=25$

自分の図と式でたしかめる

自分で別の式を平方完成し、中心と正の半径を求めます。

0または負の右辺を、円の場合と分けて理由を説明します。

図で円らしく見えることだけを、式の条件の代わりにはしません。

平方完成· 中心· 半径と点集合の条件

接点を通る条件と、半径への垂直を両方見る

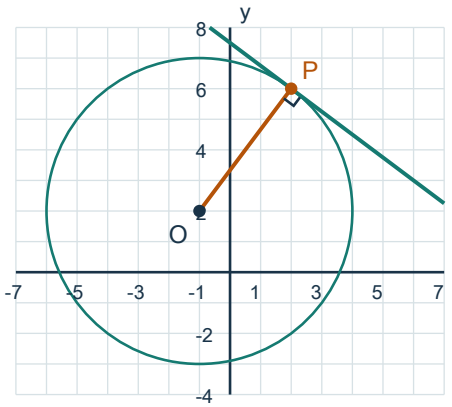
考える手がかり

中心O(−1,2)、半径5の円上のP(2,6)では、OPの差が3,4で$3^2+4^2=25$です。Pでの接線は$3(x+1)+4(y-2)=25$、すなわち$3x+4y-30=0$です。

接線はPを通り、Pでは$6+24-30=0$。OPの傾き4/3と接線の傾き−3/4の積は−1で垂直です。中心と直線の距離も$|-3+8-30|/5=5$で、正の半径と一致します。

Pが円上か、接線が指定したPを通るかを落としません。垂直という方向だけでは、接線の位置は決まりません。垂直· 水平な接線も、半径との位置関係や元の式への代入で扱います。

編集できる円· 半径と接線



O(−1,2)

P(2,6)

3x+4y−30=0

半径OPと垂直

中心からの距離5

Pの代入：6+24−30=0

中心距離：|−3+8−30|/5=5

自分の図と式でたしかめる

自分で円上の点と接線の式と計算過程を求め、両方の式へ代入します。

半径への垂直と、中心からの非負の距離を別に確かめます。

図の直角印や講師の見本だけを、自分の理由とはしません。

接点· 接線の式と計算過程· 垂直と距離

距離と判別式を結び、半弦から全体に戻す

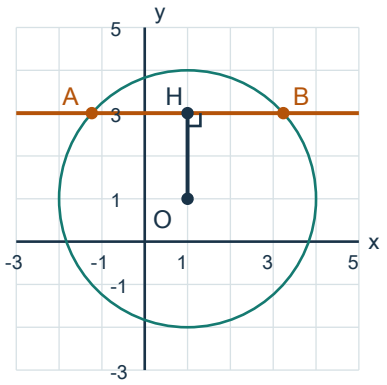
考える手がかり

円(x−1)²+(y−1)²=9と直線y=3では、中心O(1,1)からの距離は2<3です。直線は円と二点で交わり、足H(1,3)は弦の中点です。

代入すると(x−1)²+4=9からx²−2x−4=0。判別式20>0で、共有点は(1−√5,3),(1+√5,3)です。距離の比較と二次式の実数解が、同じ個数になります。

三平方の定理から半弦は√(3²−2²)=√5、弦全体は2√5です。半分だけを答えにせず、自分の垂線· 半径· 半弦と式と計算過程を対応させます。図の長さを実寸として測って答えにはしません。

編集できる円· 弦と中心からの垂線



O(1,1) / r=3

直線 y=3

OH=2<3

半弦 √5

弦全体 2√5

共有点：A(1−√5,3), B(1+√5,3)

中心から弦への垂線が、弦を二等分する。

自分の図と式でたしかめる

自分で中心距離と判別式を両方示し、全共有点へ戻します。

半径と半弦の直角三角形から、弦全体の長さを導きます。

接する場合の一点、交わらない場合の点なしとも分けます。

全共有点· 判別式· 半弦と弦全体

C1· C2：円· 直線とすべての条件

C1. 次の三つを平方完成してください。
I:$x^2+y^2+8x-4y-5=0$
II:$x^2+y^2+8x-4y+20=0$
III:$x^2+y^2+8x-4y+21=0$
実数の点の集合として円· 一点· 点なしを分け、平方完成した式から中心の座標と右辺の値を読み取り、半径が正になる条件を、式と理由を添えて示してください。

解答· 理由を書く

C2. A(−6,−3),B(2,3)を直径の両端とする円を、自分で同じ単位の座標図と式と計算過程で求めてください。中心と正の半径を導き、両端が求めた円上にあることを実際に代入して確かめます。

解答· 理由を書く

C1：座標図· 式と計算過程· 条件と検算

C2：座標図· 式と計算過程· 条件と検算

C3· C4：円· 直線とすべての条件

C3. 円$(x-3)^2+(y+2)^2=25$上の$P(0,2)$での接線を、自分で求めてください。Pの円上の条件、Pを通ることと半径への垂直、中心からの距離が半径となることを式と計算過程で確かめます。

解答· 理由を書く

C4. 中心$O(2,-1)$、半径3の円について、$P(5,-1)$と$Q(2,-4)$での接線を自分で求め、座標図に二つの半径と接線を描いてください。両接点が円上にあることと、接線と円の共有点がそれぞれ一つになることを、代入で確かめます。

解答· 理由を書く

C3：座標図· 式と計算過程· 条件と検算

C4：座標図· 式と計算過程· 条件と検算

C5· C6：円· 直線とすべての条件

C5. 中心O(−2,1)、半径2の円に、直線4x+3y+k=0が接します。全ての実数kと各接点を垂線の足として求め、元の円と対応する直線へそれぞれ代入して確かめてください。距離の絶対値と正の半径を残します。

解答· 理由を書く

C5：座標図· 式と計算過程· 条件と検算

C6. 円$(x+1)^2+(y-2)^2=25$と三直線y=5,y=7,y=8を、自分で中心距離と、代入した二次式の判別式の両方から調べてください。実数の共有点を全て求め、y=5が切り取る弦全体の長さを半弦から導きます。

解答· 理由を書く

C6：座標図· 式と計算過程· 条件と検算

C7· C8：円· 直線とすべての条件

C7. 円$(x-2)^2+(y+1)^2=25$で、友達は「P(5,3)の半径に垂直なので$3x+4y-8=0$が接線」としました。別に外点Q(8,−1)を接点として$6(x-2)=25$も接線としました。両主張を、円上· 指定点を通る条件と中心距離で調べて直してください。Pの正しい接線と、この円のy軸に平行な（縦の）接線を全て求め、各接点も示します。Qを通る二本の接線までは求めません。

解答· 理由を書く

C8. aを−3,0,2から、bを−2,1から、rを3,6から一つずつ選びます。中心O(a,b)、半径rの円と円上のP(a+4r/5,b−3r/5)を、同じ単位の座標図と式で表してください。Pでの接線を求め、Pが両式を満たすこと、半径への垂直と中心距離rを全計算で確かめます。全12条件を解く必要はありません。

解答· 理由を書く

C7：座標図· 式と計算過程· 条件と検算

C8：座標図· 式と計算過程· 条件と検算