一般角の符号を、単位円の座標に戻す

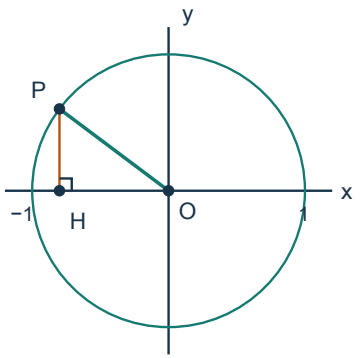
考える手がかり

単位円ではP=(cosθ,sinθ)です。図の見本は第II象限でsinθ=3/5。sin²θ+cos²θ=1からcos²θ=16/25ですが、第II象限なのでcosθ=−4/5です。平方根をいつも正にはしません。

第I象限のβでsinβ=5/13ならcosβ=12/13。見本のθとの和は
sin(θ+β)=36/65−20/65=16/65、
cos(θ+β)=−48/65−15/65=−63/65です。公式へ全ての符号を対応させます。

πラジアン=180°で、πを含む角はラジアンです。図の線・点と文字は個別に編集できますが、点を動かしても他の座標· 式や角は自動更新されません。自分の別の図· 式と計算過程を手動で確認します。

編集できる単位円· 座標と象限の見本



P=(−4/5,3/5)

θは第II象限

cosθ=−4/5

sinθ=3/5

OP=1

両軸は同じ単位。図は与えられた見本。

自分の図と式でたしかめる

自分で角の条件と、sin· cosの符号を先に残します。

単位円の座標と加法定理の式と計算過程を対応させます。

見本の図や符号だけを、自分で一般角を説明した証拠にしません。

単位円· 符号と全ての和差の式

和と差の式と計算過程を、厳密値に対応させる

考える手がかり

sin(α±β)=sinαcosβ±cosαsinβです。
cos(α+β)=cosαcosβ−sinαsinβ、
cos(α−β)=cosαcosβ+sinαsinβで、cosでは和と差の符号が逆になります。

例えば
cos75°=cos45°cos30°−sin45°sin30°
=(√2/2)(√3/2)−(√2/2)(1/2)
=(√6−√2)/4です。図の四つの結果も、自分でそれぞれ式と計算過程と符号へ戻して確かめます。

同じθを二つの角へ入れると
sin2θ=2sinθcosθ、
cos2θ=cos²θ−sin²θです。
sin²θ+cos²θ=1を用いて
cos2θ=1−2sin²θ=2cos²θ−1とも表せます。数値を一つ代入して確かめても、任意の角についての証明にはなりません。

編集できる既知角の和差と厳密値

75° = 45°+30°

sin75° = (√6+√2)/4

cos75° = (√6−√2)/4

15° = 45°−30°

sin15° = (√6−√2)/4

cos15° = (√6+√2)/4

自分の図と式でたしかめる

自分で既知角の値を公式の各項に対応させます。

根号の同値な別表記や正しい別の角の分け方を認めます。

倍角の2θと、値を二乗するsin²θを分けます。

全公式· 代入· 平方根と導出

合成の係数と位相、tanの定義条件を分ける

考える手がかり

cosφ=5/13、sinφ=12/13、0<φ<π/2とすると、13sin(θ−φ)=5sinθ−12cosθです。R=√(5²+12²)=13。全展開でsinθとcosθの二つの係数を確かめ、二つを逆にはしません。

tanの和は、tanα,tanβが定義され、cos(α+β)≠0のとき(tanα+tanβ)/(1−tanαtanβ)です。差の分母は1+tanαtanβ。分母0なら普通の割り算をせず、元のsinとcosから定義を確認します。

α=β=π/4では和はπ/2でtanが定義されませんが、差は0でtan0=0です。自分で和と差の条件を別々に見ます。合成の例は恒等式を表す活動で、最大値や方程式全体を解いたとはしません。

編集できる合成の全係数と条件

5sinθ−12cosθ

=13sin(θ−φ)

cosφ=5/13 / sinφ=12/13

0<φ<π/2

13sinθ·(5/13)−13cosθ·(12/13)

係数5と−12へ、全展開で戻す。

自分の図と式でたしかめる

自分でRと位相角のsin· cos、全展開を残します。

tanを使う前に、元の角と分母の条件を確かめます。

一つの角での確認と、全ての角の恒等式の理由を分けます。

合成· 全係数と定義条件

C1· C2：式と計算過程· 符号と条件

C1. αは第II象限でsinα=8/17、βは第I象限でcosβ=4/5です。単位円の符号を示す図を作り、cosαとsinβを求めます。sin(α+β)、cos(α+β)、sin(α−β)、cos(α−β)を全公式から求め、和と差の二つでsin²+cos²=1を確かめてください。

解答· 理由を書く

C2. 105°=60°+45°と−15°=30°−45°から、sin105°、cos105°、sin(−15°)、cos(−15°)を厳密値で求めてください。各式と計算過程· 象限や負角の符号を示し、根号を整理します。小数だけでなく厳密値を残します。

解答· 理由を書く

C1：図· 全公式· 条件と検算

C2：図· 全公式· 条件と検算

C3· C4：式と計算過程· 符号と条件

C3. α,βは第I象限、tanα=3/4、tanβ=1/7です。tan(α+β)、tan(α−β)の分母と式と計算過程を示し、値を求めます。和のsinとcosの符号を確かめ、0<α+β<πで和の角を特定してください。

解答· 理由を書く

C4. 加法定理から倍角のsinとcosの二式を導き、cos2θの別の二形も示してください。θは第IV象限、cosθ=3/5です。sinθ、sin2θ、cos2θを求めて、倍角の二つの値の二乗和を確かめます。

解答· 理由を書く

C3：図· 全公式· 条件と検算

C4：図· 全公式· 条件と検算

C5· C6：式と計算過程· 符号と条件

C5. 全ての実数u,vについてcos(u+v)+cos(u−v)=2cosucosvを、加法定理の式と計算過程から示してください。u=π/4,v=π/6としてcos(5π/12)+cos(π/12)の厳密値を求め、数値の一例での確認と、任意の角についての証明を区別しましょう。

解答· 理由を書く

C6. 7sinθ+24cosθをRsin(θ+φ)へ合成してください。R>0、0<φ<π/2としてR、cosφ、sinφを求め、全実数θでの展開とθ=0、θ=π/2の値で係数を確認します。φを小数へ直す必要はありません。

解答· 理由を書く

C5：図· 全公式· 条件と検算

C6：図· 全公式· 条件と検算

C7・C8：式と計算過程・符号と条件

C7. 友達は「α=β=π/4だから cos(α+β)=cosαcosβ+sinαsinβ=1、tan(α+β)も1」としました。実際の和の角、正しいcosとtanの定義条件から全て直してください。別に差の角のcosとtanも計算し、和と差を区別します。

解答・理由を書く

C8. αの条件を
A「第II象限、sinα=5/13」か
B「第III象限、sinα=−7/25」から、βの条件を
C「第I象限、cosβ=15/17」か
D「第IV象限、cosβ=12/13」から一つずつ選びます。選んだ一組を明記して不足するsin・cosを符号ごと求め、和と差のsin・cosの四つを式で表してください。二つの二乗和と、和のtanの定義と値を確かめます。全四組は必須にしません。

解答・理由を書く

C7：図・全公式・条件と検算

C8：図・全公式・条件と検算