正の底と、指数を広げる意味を残す

考える手がかり

正の底aについて$a^0=1$、正の整数nについて$a^{(-n)}=1/a^n$です。商や積の指数法則が、0や負の指数へ広げても保たれるように定めます。負の指数の値を、単に負の数にはしません。

正のq乗根を使い、整数p· 正の整数qについて$a^{(p/q)}=(a^{(1/q)})^p$と表します。
27の正の3乗根は3なので$27^{(2/3)}=9$。
$16^{(-1/2)}$は正の平方根4の逆数で1/4です。

実数への拡張は、近い有理数の値や連続したグラフから直観的に捉えます。ここで厳密な実数指数の構成を証明したとはしません。0や負の底へ、この実数指数の定義をそのまま広げません。

編集できる底· 0と負数と分数の指数

底 $a>0$

$a^0=1$ / $a^{(-n)}=1/a^n$

nは正の整数

$27^{(2/3)} = 3^2 = 9$

$16^{(-1/2)} = 1/4$

累乗根は正の値。±の解と区別。

自分の図と式でたしかめる

自分で底の正と、使った指数法則を式と計算過程へ書きます。

正の累乗根と、二乗の方程式の二つの解±を分けます。

近い有理数の計算だけを、実数指数の厳密な構成の証明にはしません。

指数の意味· 式と計算過程と底の条件

表の点と、全実数での性質を分ける

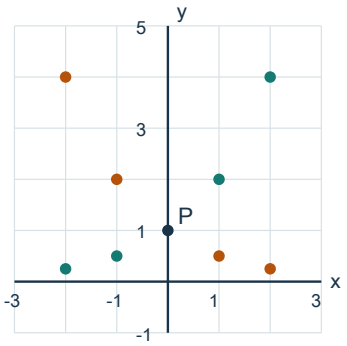
考える手がかり

y=2^xは単調に増加し、y=(1/2)^xは単調に減少します。両方とも全ての実数xで正で、(0,1)を通ります。底が正で1でなければ一対一なので、同じ底の値が等しいことと、指数が等しいことは同値です。

図はx=−2,−1,0,1,2での与えられた5点ずつだけです。点を直線で結んだ折れ線を指数関数全体とはせず、自分で別に滑らかな曲線と全実数での性質を示します。有限な点の表だけを、全実数での増減や正の証明にはしません。

a=1なら1^xは全実数で1で、一対一ではありません。またa>0ならa^x=0や負の数となる実数xはありません。図の点· 軸· 文字を動かしても、他の値や式は自動更新されません。

編集できる同じ単位の軸と、二つの表の点



x=−2,−1,0,1,2

2^x：1/4,1/2,1,2,4

(1/2)^x：4,2,1,1/2,1/4

P(0,1) は共通の点

与えられた5点ずつだけを表示

曲線は自分で別に描き、点の表と性質へ戻します。

自分の図と式でたしかめる

自分で曲線· 値の範囲と、同じ値を二度取らない性質を対応させます。

底1の例外と、正の値しか取らない条件を分けます。

見本の5点を書き写したことと、自分の全体の説明を分けます。

曲線· 表· 正の値と一対一性

置き換えた数の範囲と、全てのxに戻す

考える手がかり

見本4^x+2·2^x−8=0ではt=2^x>0と置きます。
4^x=(2^x)²=t²なので
t²+2t−8=(t−2)(t+4)=0です。
t=−4は正の条件に合わず除きます。

残るt=2から2^x=2、底2は一対一なのでx=1だけです。元の式でも4+4−8=0。二次式の解tをそのままxの答えにせず、正の候補を全て元へ戻します。

t=a^x>0ならa^(−x)=1/tで、分母tは0になりません。指数に数を足す操作は値の積へ対応し、和へは変えません。最後の正答だけでなく、生徒の底と置き換えの条件· 式· 計算過程· 理由を講師が確認します。

編集できる置き換え· 二次式と除外条件

4^x+2·2^x−8=0

t=2^x > 0

t²+2t−8=(t−2)(t+4)=0

t=−4 は条件から除く

t=2 → x=1

元でも4+4−8=0

自分の図と式でたしかめる

自分でtの範囲と、許されない候補の理由を残します。

全ての正の候補からxへ戻し、元の式へ代入します。

数例だけの一致と、全ての実数解だとする理由を分けます。

正の置き換え· 全解と元への代入

C1· C2：式と計算過程· 底と全実数解

C1. 正の累乗根と指数法則から、64^(−2/3)と81^(3/4)の厳密値を求めてください。負の指数と正の累乗根の意味、計算の式と計算過程を示します。方程式$z^2=81$の全実数解も別に求め、81^(1/2)の値との違いを説明します。

解答· 理由を書く

C2. 8^(x−1)=4^(x+1)の全ての実数解を求めてください。底をそろえるときの指数のかっこの全体と、一対一性の条件を示し、元の両辺への代入で確かめます。

解答· 理由を書く

C1：式と計算過程· 条件· 全解と検算

C2：式と計算過程· 条件· 全解と検算

C3· C4：式と計算過程· 底と全実数解

C3. (1/4)^(2x−1)=8^(x+1)の全ての実数解を求めてください。逆数の底と負の指数を、同じ底の式に直す計算過程を示し、元の両辺に実際に代入します。

解答· 理由を書く

C3：式と計算過程· 条件· 全解と検算

C4. 4^x−6·2^x+8=0の全ての実数解を求めてください。置き換える数と範囲、二次式の全解からxに戻す過程と、元の式への各代入を示します。

解答· 理由を書く

C4：式と計算過程· 条件· 全解と検算

C5· C6：式と計算過程· 底と全実数解

C5. 9^x+8·3^x−9=0の全ての実数解を求めてください。置き換えた二次式の全解を調べ、0以下の候補が元へ戻せるかを指数関数の値の範囲から説明します。

解答· 理由を書く

C5：式と計算過程· 条件· 全解と検算

C6. 3^x+3^(−x)=10/3の全ての実数解を求めてください。逆数の式と置き換えの範囲、分母を払う条件を示し、各xを元の式で確かめます。

解答· 理由を書く

C6：式と計算過程· 条件· 全解と検算

C7· C8：式と計算過程· 底と全実数解

C7. 友達は1^(x−1)=1^(2x+3)で「指数を等しくしてx=−4だけ」としました。底1の性質と元の式から全実数解を求めて説明を直してください。別に2^x=0の全実数解も調べ、二つの解集合の違いを示します。

解答· 理由を書く

C8. aを2,3から、pを−1,2から、qを0,1から一つずつ選びます。
a^(2x)−(a^p+a^q)a^x+a^(p+q)=0
の具体式を作り、t=a^xの範囲· 因数分解と全実数解、元への各代入を示してください。8通り全てを調べる必要はありません。

解答· 理由を書く

C7：式と計算過程· 条件· 全解と検算

C8：式と計算過程· 条件· 全解と検算