底と元の真数を、変形の前に残す

考える手がかり

a>0、a≠1、M>0のとき、log_a Mはa^p=Mとなるただ一つの実数pです。対数の値pは負や0にもなりますが、真数Mは正に限ります。底1や0· 負の真数へ、この定義をそのまま使いません。

同じ許された底で、M,N>0なら
log_a M+log_a N=log_a(MN)、
log_a M−log_a N=log_a(M/N)です。
和をまとめても真数はM+Nにはなりません。
log_a(M^r)=r log_a Mも、ここではM>0で使います。

元の二つの対数が定義される条件を先に残します。積MNが正という条件だけに広げると、M,Nが両方負の候補を誤って入れることがあります。同値な正しい式変形や別解も認めます。生徒が書いた対数式は、講師が確認します。

編集できる定義· 積と商の法則と元の条件

a>0、a≠1、M>0

log_a M = p ⇔ a^p = M

M,N>0 のとき

log_a M + log_a N = log_a(MN)

log_a M − log_a N = log_a(M/N)

元の真数を先に、別々に確認

自分の図と式でたしかめる

底の条件と、元の式の全ての真数が正であることを、別々に書きます。

対数の値が負でよいことと、真数が正であることを分けます。

まとめた積の正だけで元の条件を置き換えていないかを見ます。

定義· 式と計算過程と元の真数条件

真数の範囲と、対数の値の範囲を分ける

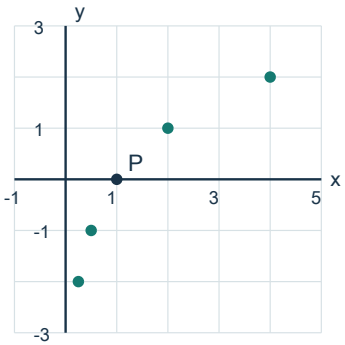
考える手がかり

y=log_2 xはx>0で定義され、単調に増加します。値yには負の数も0もあり、y=−2ならx=1/4、y=0ならx=1です。対数の値が負だから未定義、とする説明は直します。

図は与えられた5点だけです。自分で指数の定義と対応させて別に滑らかな曲線を描きます。有限の点を直線で結んだ折れ線を対数関数全体とはせず、点の表だけを全体の増減· 一対一性の証明にはしません。

許された同じ底では、log_a M=log_a NとM=Nは、元のM,N>0の範囲で同値です。0<a<1でも一対一ですが単調に減少します。ここでは等式を扱い、不等式の向きや微分は前提にしません。図を動かしても式や値は自動更新されません。

編集できる同じ単位の軸と、対数の表の5点



y=log_2 x の与えられた5点

x：1/4,1/2,1,2,4

y：−2,−1,0,1,2

P(1,0)、定義域 x>0

点だけを曲線全体の証明にしない

自分で別に曲線を描き、元の真数の正へ戻します。

自分の図と式でたしかめる

自分で真数x>0と、負にもなる対数の値yを対応させます。

同じ底の一対一性と、元の両真数の正を一緒に残します。

有限の点· 自分の曲線· 全体の性質の説明を区別します。

表· 曲線と真数· 値の範囲

候補を元の真数へ戻し、全ての解を確かめる

考える手がかり

見本log_2(x−1)+log_2(x+2)=2では、
x−1>0、x+2>0から元の条件はx>1です。
その範囲でlog_2((x−1)(x+2))=2、
(x−1)(x+2)=4と同値に変形できます。

x²+x−6=(x−2)(x+3)=0なので候補は2,−3。x=−3では元の真数が−4,−1で、積が4でも二つの対数は未定義です。x=2だけが条件を満たし、元でもlog_2 1+log_2 4=0+2=2です。

t=log_a xと置く場合、x>0に対しtは全実数を動きます。指数の置き換えt=a^x>0と混同しません。候補の全て・除外した理由と、残る各解の元への代入を式と計算過程から手動確認します。

編集できる元の条件・全候補と除外の理由

log_2(x−1)+log_2(x+2)=2

元の条件：x−1>0、x+2>0 → x>1

(x−1)(x+2)=4

x²+x−6=(x−2)(x+3)=0

x=−3 は元の条件から除く

x=2：log_2 1 + log_2 4 = 2

自分の図と式でたしかめる

自分で積をまとめる前の二つの条件を残します。

全候補から除く理由と、残す各解の元への代入を分けます。

対数の置き換えtの範囲を、指数の置き換えと混同しません。

全候補・元の条件と全実数解

C1· C2：元の条件· 途中の式· すべての解

C1. log_3(1/27)、log_(1/4) 8、log_5 1の値を、指数の式に直して求めてください。底と真数の条件、途中の式を示し、対数の値が負や0でもよい理由を説明してください。

解答· 理由を書く

C2. log_2(x+3)=log_2(3x−5)の全ての実数解を求めてください。元の両真数の正と同じ底の一対一性、全変形を示し、残す各解を元の式で確かめてください。

解答· 理由を書く

C1：真数条件· 式と計算過程· すべての解と検算

C2：真数条件· 式と計算過程· すべての解と検算

C3· C4：元の条件· 途中の式· すべての解

C3. log_3(x−1)+log_3(x+1)=1の全ての実数解を求めてください。元の各真数の条件、積の法則と指数への変形、全候補を残すか除くかの理由と元への代入を示してください。

解答· 理由を書く

C4. log_2(x+1)+log_2(x−1)=3の全ての実数解を求めてください。元の二つの真数と、まとめた積の条件を区別し、全候補と元の式への代入を示してください。

解答· 理由を書く

C3：真数条件· 式と計算過程· すべての解と検算

C4：真数条件· 式と計算過程· すべての解と検算

C5· C6：元の条件· 途中の式· すべての解

C5. log_3(x+2)−log_3(x−2)=1の全ての実数解を求めてください。元の真数条件と商の法則、分母を払える理由、式と計算過程と元への代入を示してください。

解答· 理由を書く

C6. (log_2 x)²−3log_2 x+2=0の全ての実数解を求めてください。元の条件、置き換えたtの範囲、全てのxに戻す過程と元への各代入を示してください。t=2^xの場合の範囲との違いも説明してください。

解答· 理由を書く

C5：真数条件· 式と計算過程· すべての解と検算

C6：真数条件· 式と計算過程· すべての解と検算

C7· C8：元の条件· 途中の式· すべての解

C7. 友達はlog_2 x+log_2(x−3)=2を「log_2(2x−3)=2だからx=7/2」としました。元の真数条件と正しい法則にもとづいて友達の説明を直し、全ての実数解を求めてください。友達の求めた候補も、元の式に代入して確かめてください。

解答· 理由を書く

C8. aを2,3から、pを1,2から、kを−1,2から一つずつ選び、log_a(x−k)=pの具体式を作ってください。元の条件、指数への全変形と全実数解、元への代入を示してください。8通り全てを調べる必要はありません。

解答· 理由を書く

C7：真数条件· 式と計算過程· すべての解と検算

C8：真数条件· 式と計算過程· すべての解と検算