hで割る条件と、近づく値を分ける

考える手がかり

f(x)=x²−3x+2のx=1ではf(1)=0です。
f(1+h)=h²−hなので、h≠0で
(f(1+h)−f(1))/h=h−1。
hを0へ近づけると値は−1へ近づきます。

有限のhでの平均変化率h−1と、微分係数f′(1)=−1を分けます。最初からh=0を入れて0/0を計算したことにはしません。極限は直観的に扱い、厳密な一般理論を証明したとはしません。

接線は接点(1,0)を通り、傾きが−1なので、y=−(x−1)=−x+1です。自分で全展開· hの条件と、元の点への代入を残し、講師の見本と自分の計算を分けます。

編集できる平均変化率· 元の点と接線の式と計算過程

f(x)=x²−3x+2、a=1

f(1)=0、f(1+h)=h²−h

h≠0 で平均変化率は h−1

h→0 のとき h−1→−1

f′(1)=−1、接点(1,0)

接線：y=−x+1

自分の図と式でたしかめる

自分でh≠0の条件と、展開· 約分の式と計算過程を残します。

平均変化率の式と、h→0での一つの値を分けます。

接線の傾きと元の点を通る条件を、両方確かめます。

平均変化率· 条件と元の接点

接線を、元の点と導関数の値に戻す

考える手がかり

多項式では定数の導関数は0、
$(x^n)'=nx^{n-1}$（n=1,2,3）です。
定数倍· 和· 差を項ごとに計算します。
$f=x^3-3x+1$なら$f'=3x^2-3$。
元の定数1をそのまま残しません。

x=aでの接線は$y-f(a)=f'(a)(x-a)$。
見本a=0では元の点は(0,1)、傾きは−3なので、$y-1=-3x$、$y=-3x+1$です。接線の切片を微分係数と混ぜません。

$f'(a)=0$なら接線は水平な$y=f(a)$で、必ずしもx軸ではありません。傾きが同じ接線を全て求める場合は、接点の未知数aについて$f'(a)$の方程式の全根を調べ、各接点の元の値へ戻します。

編集できる多項式· 導関数· 点と傾き

$f(x)=x^3-3x+1$

$f'(x)=3x^2-3$

x=0：f(0)=1、f′(0)=−3

$y-1=-3(x-0)$

接線：$y=-3x+1$

点(0,1) / 傾き−3 を別々に確認

自分の図と式でたしかめる

自分で元のf(a)と、導関数の値f′(a)を別々に計算します。

接線の式と計算過程に元の接点を実際に代入します。

指定した傾きの全接線は、全接点から一つずつ確かめます。

導関数の計算· 接点と接線

全区間の符号と、元の極値を対応させる

考える手がかり

f=x³−3x−2ではf′=3(x+1)(x−1)。
全零点は−1,1で、符号は左から正· 負· 正。
元のfは増加· 減少· 増加となり、
x=−1で極大値0、x=1で極小値−4です。
極値の値は元のfへ代入します。

f′(a)=0だけでは極値とは限りません。x³は0の両側で導関数3x²が正で増加が続き、0は極大· 極小でありません。前後での符号の変化を、因数の符号から全区間について説明します。

閉区間の最大· 最小は、区間内のf′(x)=0となるすべての点と両端の元の値を比べ、同じ最大値· 最小値を取るxも全て残します。右の増減表は関数の曲線ではありません。自分で別に元の式· 値と符号から概形を描き、有限な値の表や見た目だけを全体の理由にしません。

編集できる導関数の符号と、元の極値

f(x)=x³−3x−2

f′(x)=3(x+1)(x−1)

x	x<−1	−1<x<1	x>1
f′	+	−	+

x=−1で極大0 / x=1で極小−4

増減表です。関数の曲線は自分で描きます。

自分の図と式でたしかめる

自分で導関数の全零点と、区間ごとの因数の符号を残します。

極大· 極小の位置と、元の関数での値を対応させます。

閉区間の端点と、同じ最大値· 最小値を取る全てのxも比べます。

増減表· 元の値とグラフ

C1· C2：式と計算過程· 符号と元の値

C1. $f(x)=x^2-4x+6$について、$h\neq0$で$(f(2+h)-f(2))/h$を展開· 整理し、$h\to0$から$f'(2)$を求めてください。元の点と接線の式と計算過程も示し、微分係数が0でも元の関数値が0とは限らない理由を説明してください。

解答· 理由を書く

C2. $f(x)=-2x^3+3x^2+4x-1$について、導関数と$x=1$での元の値· 微分係数を求め、接線の式と計算過程を示してください。元の点の代入と、接線の傾きから両条件を確かめてください。

解答· 理由を書く

C1：導関数· 増減表· 関数の値と概形

C2：導関数· 増減表· 関数の値と概形

C3· C4：式と計算過程· 符号と元の値

C3. $f(x)=x^3+3x^2-9x+2$について、導関数を因数分解し、全零点· 全区間の符号と増減表を作ってください。全ての極大· 極小の位置と元の値を求め、軸と一様な目盛を付けた概形を描いてください。

解答· 理由を書く

C4. $f(x)=x^3-3x$、$-1 \leqq x \leqq 3$について、導関数の符号と閉区間の全候補の値を調べ、最大値· 最小値と、それぞれの値を取るすべてのx、指定部分の概形を示してください。左端も導関数が0になる点である場合に、同じ点を二重に数えない理由も説明してください。

解答· 理由を書く

C3：導関数· 増減表· 関数の値と概形

C4：導関数· 増減表· 関数の値と概形

C5・C6：式と計算過程・符号と元の値

C5. $f(x)=x^3-6x^2+8$のグラフで、傾き-9の接線を全て求めてください。接点のxを未知数aとして条件を立て、全ての接点の座標と接線の式と計算過程、元の点と導関数の確認を書き残してください。

解答・理由を書く

C6. 友達は$f(x)=x^3+2$で「$f'(0)=0$だから$x=0$で極小値2」としました。全零点と両側の符号から説明を直して概形を描きます。別に$g(x)=x^2+2$も同じように調べ、両方が点$(0,2)$で水平な接線を持つのに、極値の結論が違う理由を示してください。

解答・理由を書く

C5：導関数・増減表・関数の値と概形

C6：導関数・増減表・関数の値と概形

C7・C8：式と計算過程・符号と元の値

C7. 位置$s(t)=t^3-3t^2$ m、$0 \leqq t \leqq 3$秒について、速度の式と計算過程・全停止時刻と各区間の向きを符号表で示してください。始めと終わりの変位と道のりを別々に求め、各区間の位置と単位で確かめてください。始点の停止と、区間内での向きの反転も区別します。

解答・理由を書く

C8. Aを−2,1から、rを1,2から、cを−1,2から一つずつ選び、$f(x)=Ax^3-3Ar^2x+c$の具体式を作ってください。導関数の式・全零点と増減表、全ての極大・極小の位置と値、$x=0$での接線を求め、概形と元の点を図に示します。8通り全てを調べる必要はありません。

解答・理由を書く

C7：導関数・増減表・関数の値と概形

C8：導関数・増減表・関数の値と概形