積分定数と、端点の引く順を分ける

考える手がかり

F′(x)=2x+1、F(1)=4なら、
F(x)=x²+x+C。元の条件に戻して
1+1+C=4よりC=2です。
逆に微分するとF′=2x+1となり、
定数2の導関数は0です。

∫[a,b]f(x)dxは下端a· 上端bを表します。
原始関数FでF(b)−F(a)を計算します。
見本∫[1,3](2x+1)dxではF(3)=14、
F(1)=4なので14−4=10。
逆向き∫[3,1]では4−14=−10です。

二次以下の多項式を中心に、定数倍· 和· 差を項ごとに積分します。原始関数は三次になっても構いません。自分で同じ積分定数を両端で使い、差で消える理由を残します。原始関数を微分して元の式に戻す確認と、元の初期条件への代入を分けます。

編集できる原始関数· 初期条件· 両端の値

F′=2x+1 / F(1)=4

F=x²+x+2 / 微分して確認

F(3)=14 / F(1)=4

∫[1,3](2x+1)dx = 14−4 = 10

∫[3,1](2x+1)dx = 4−14 = −10

同じCは、両端の差で打ち消し合う。

自分の図と式でたしかめる

自分の積分定数を、元の初期条件へ代入します。

原始関数を逆に微分し、元の式の全係数と照合します。

下端· 上端と、それぞれの端点値· 引く順を残します。

原始関数· 積分定数· 端点の式と計算過程

符号付きの値と、正の面積を分ける

考える手がかり

$f=x^2-4x+3=(x-1)(x-3)$は、
全零点が1,3。因数の符号から
$1<x<3$では負、$x<1$と$x>3$では正です。
二つの零点の間で、x軸が上、fが下なので、面積の被積分関数は0−fです。

原始関数$F=x^3/3-2x^2+3x$では
$F(1)=4/3$、$F(3)=0$。
$\int[1,3]f\,dx=-4/3$ですが、
面積は$\int[1,3](-f)dx=4/3$です。
面積に負の値をそのまま付けません。

図だけで上下を決めず、全零点と各区間の因数の符号を理由にします。右は符号の表で、元の曲線ではありません。自分で一様な目盛の軸へ曲線· 交点と対象部分を別に描きます。区間中で上下が反転する場合は、反転する全ての点で分けて各面積を足します。

編集できる全区間の符号· 積分と面積

$f(x)=x^2-4x+3=(x-1)(x-3)$

$x<1$	$1<x<3$	$x>3$
+	−	+

全零点：1,3 / 間では$f(x)\leqq 0$

符号付き積分 $\int[1,3]f(x)dx = -4/3$

面積 $\int[1,3](-f(x))dx = 4/3$

自分の図と式でたしかめる

自分の全零点を、元の式へ実際に代入します。

対象区間の上· 下を、因数の符号から説明します。

符号の表と、自分で描く元の曲線· 対象部分を分けます。

全交点· 因数の符号· 曲線と対象部分

二曲線を、全交点と上から下の差に戻す

考える手がかり

見本f=x²、g=−x+6の共有点は
x²=−x+6から(x+3)(x−2)=0、
x=−3,2です。元の両式に戻すと
共有点は(−3,9),(2,4)。
x座標だけでなく両方の元の値を確認します。

g−f=−(x+3)(x−2)なので、
−3<x<2ではgが上、fが下です。
面積は∫[−3,2](−x²−x+6)dx。
原始関数G=−x³/3−x²/2+6xで、
G(2)=22/3、G(−3)=−27/2。
差は125/6です。

二曲線だけで囲まれる範囲と、別に指定した区間を区別します。指定した範囲に複数の上下反転があれば、全交点で分割します。符号付き積分全体の絶対値だけでは、各面積の和と一致しないことがあります。生徒が描いた図、積分の式と計算過程、理由は講師が確認します。

編集できる元の両曲線· 全交点· 面積の式と計算過程

f=x² / g=−x+6

共有点：(−3,9),(2,4)

g−f=−(x+3)(x−2) は間で正

S=∫[−3,2](g−f)dx

G(2)=22/3 / G(−3)=−27/2

S=22/3−(−27/2)=125/6

自分の図と式でたしかめる

自分で全交点を求め、元の二つの式へ両方代入します。

全区間の上· 下を理由にし、必要な全分割を残します。

原始関数を微分して被積分関数に戻ること、両端での値、面積が負でないことを確かめます。

二曲線· 上下· 全区分と積分の式と計算過程

C1· C2：原始関数· 定数と端点

C1. $F'(x)=3x^2-2x+4$、$F(0)=-2$について、積分定数を含むFの式とF(2)を、計算過程を示して求めてください。求めた原始関数を微分して与えられた導関数に戻ることと、$F(0)=-2$を満たすことを、それぞれ確かめてください。

解答· 理由を書く

C2. $\int_{[-1,3]}(x^2-2x)dx$を、全ての端点値と引く順から求めてください。$x=1$で分けた二つの積分の和とも比べ、逆向きの$\int_{[3,-1]}$の式と計算過程を示して確かめてください。

解答· 理由を書く

C1：原始関数· 定数と元の条件

C2：全端点· 引く順と分割

C3· C4：全交点· 区分と面積

C3. $y=x^2-2x-3$とx軸で囲まれる部分を、全交点と全区間の符号から図に示してください。面積の積分の式を計算過程とともに示して値を求め、原始関数を微分して元の式に戻ること、両端の値、面積が負でないことから確かめてください。

解答· 理由を書く

C4. $f(x)=x^2$、$g(x)=3x+4$で囲まれる部分の面積を求めてください。全交点を元の二つの式へ代入し、全区間の上下· 一様な軸の図と、積分の式と計算過程· 両端の確認を書き残してください。

解答· 理由を書く

C3：図· 全交点· 上下と積分の式と計算過程

C4：図· 全交点· 上下と積分の式と計算過程

C5· C6：全交点· 区分と面積

C5. $y=x^2$と$y=9$の間の部分を、$-4 \leqq x \leqq 4$の指定範囲で考えます。全交点で分けて各面積と合計を求め、$\int_{[-4,4]}(x^2-9)dx$とその絶対値も比べてください。図と因数の符号から、一つの絶対値だけでは面積にならない理由を示してください。

解答· 理由を書く

C6. $f(x)=-x^2+3x+4$、$g(x)=x^2-x-2$の二つの放物線で囲まれる部分を考えます。全交点と各区間の上下関係を図に示し、積分の式と計算過程を示して面積を求めてください。交点を元の二つの式に代入し、原始関数を微分して被積分関数と一致すること、両端での値を確かめてください。

解答· 理由を書く

C5：図· 全交点· 上下と積分の式と計算過程

C6：図· 全交点· 上下と積分の式と計算過程

C7· C8：全交点· 区分と面積

C7. 友達は「∫[0,2](x−1)dx=0だから、y=x−1とx軸の間の0≦x≦2の面積も0」としました。全零点と符号で説明を直し、各積分の式と計算過程· 端点値と、三角形の面積から同じ値を確かめてください。

解答· 理由を書く

C8. Aを1,3から、rを1,2から、cを−1,2から一つずつ選び、f(x)=A((x−c)²−r²)の具体式を作ってください。全零点と全区間の符号を元の式で確かめ、x軸で囲まれる部分の図· 積分の式と計算過程と面積を示してください。原始関数を微分して元へ戻し、両端でも確認します。8通り全てを調べる必要はありません。

解答· 理由を書く

C7：図· 全交点· 上下と積分の式と計算過程

C8：図· 全交点· 上下と積分の式と計算過程