項番号と、負の公比を掛ける回数に戻す

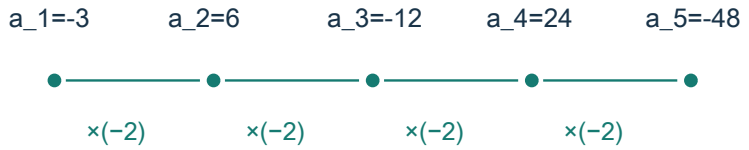
考える手がかり

初項−3、公比−2なら、
最初の5項は−3,6,−12,24,−48です。
第1項から第5項までは4回掛け、
$a_5=-3(-2)^4=-48$となります。
項番号と値を分けて対応させます。

一般項は$a_n=-3(-2)^{n-1}$。
負の公比をかっこへ入れ、
整数指数の偶奇で符号を確かめます。
a_5/a_2では間隔が3なので、
比は公比そのものではなくr^3です。

ここでは初項と公比は0でない実数、項番号は正の整数とします。負の公比や1、正の分数も認めます。初めの数項だけから、全ての項が同じ比で続くとは決めません。図の線と文字を動かしても、他の値や式は自動更新されません。

編集できる五つの項と四つの乗算



項番号1,2,3,4,5 / 掛けるのは4回

$a_n=-3(-2)^{n-1}$

$a_5/a_2 = -48/6 = (-2)^3$

自分の図と式でたしかめる

自分で項番号と値を二段にし、掛ける回数を示します。

離れた二項では、番号の差を公比の指数に対応させます。

負の公比の整数指数と、全項に及ぶ条件を確かめます。

項番号· 公比· 掛ける回数と一般項

公比を掛けた同じ和を、指数の列へそろえる

考える手がかり

初項6、公比1/2の初めの4項は
6,3,3/2,3/4で、和をS_4とします。
和全体へ1/2を掛けると
3,3/2,3/4,3/8となります。
同じ値の中間項を縦にそろえます。

引くと(1−1/2)S_4=6−3/8=45/8。
したがってS_4=45/4です。
一般にもS_n−rS_n=a−ar^n。
r≠1ならS_n=a(1−r^n)/(1−r)。
新しい末項ar^nを落としません。

r=1なら全ての項がaで、和はnaです。分母が0になる公式へ代入して済ませません。途中の第p項から第q項までは両端を含むq−p+1項。先頭からの和の差ならS_q−S_(p−1)で確かめ、p=1のS_0は空の和0とします。

編集できる二段の有限の和と三つの共通項

S_4	6	3	3/2	3/4	
(1/2)S_4		3	3/2	3/4	3/8

同じ中間項が消え、6と3/8が残る。

(1−1/2)S_4 = 6−3/8 = 45/8

S_4 = 45/4 / 6+3+3/2+3/4

自分の図と式でたしかめる

自分で和へ公比を掛け、同じべきの列を対応させます。

消える中間項と、残る初項· 新しい末項を分けます。

公比1の別の理由と、両端を含む項数を残します。

二段の式と計算過程· 残る両端と有限の和

二項の条件から、正負の公比を両方に戻す

考える手がかり

等比数列でa_2=−12、a_4=−48なら、
a_4/a_2=r²=4です。
実数の公比はr=2又は−2。
r=2なら初項a=−6、
r=−2なら初項a=6です。

一般項は−6·2^(n−1)又は
6(−2)^(n−1)。第3項は−24又は24。
初めの4項の和も−90又は−30です。
二つの元の項は両方満たしても、
他の項や和まで同じとは限りません。

公比が正という追加条件がなければ、負の候補を落としません。項番号は正の整数です。負の底の式を実数全体へそのまま広げず、例えばn=3/2をこの数列の項番号にはしません。有限な各S_nの計算から、無限級数の和や極限は結論しません。

編集できる二つの公比· 初項· 項と和の表

公比r	初項a	第3項	S_4
2	−6	−24	−90
−2	6	24	−30

両方とも a_2=−12 / a_4=−48

r²=4の全実数解は2と−2。正とは限らない。

自分の図と式でたしかめる

自分で番号の差と公比のべきを対応させます。

実数の全候補を出し、元の二条件へ両方戻します。

同じ条件を満たすことと、他の項や和が同じことを分けます。

全候補· 一般項· 元のすべての条件と定義域

C1・C2：公比・すべての条件と有限の和

C1. 実数の公比をもつ等比数列でa_2=18、a_5=−144です。初項・公比・一般項とS_6を求め、二項の番号差と掛ける回数を示してください。元の二項と初めの6項の直接和でも確かめてください。

解答・理由を書く

C2. 初項4、公比3の初めの4項の和をS_4として、S_4と3S_4を同じべきの列へそろえてください。消える項と残る両端から和を求め、一般の公比rの公式と、r=1を別に扱う理由へ戻します。

解答・理由を書く

C1：表・二段の式と計算過程・条件と確認

C2：表・二段の式と計算過程・条件と確認

C3· C4：公比· すべての条件と有限の和

C3. a_n=2·3^(n−1)の等比数列で、第2項から第6項までの和を自分で求めてください。両端を含む項数を説明し、この部分の初項からの公式と、二つの先頭からの和の差で確認します。

解答· 理由を書く

C4. 等比数列でa_3=36、a_5=144です。公比は正とは限りません。実数の初項· 公比の全ての組と一般項、第4項、S_5を示し、元の両方の条件へ戻してください。

解答· 理由を書く

C3：表· 二段の式と計算過程· 条件と確認

C4：表· 二段の式と計算過程· 条件と確認

C5· C6：公比· すべての条件と有限の和

C5. 初項−6で、公比1の場合と公比−1の場合を比べてください。各場合の最初の6項と途中までの和の表を作り、全ての正の整数nでのS_nとS_8を説明してください。有限な和と、無限個の和を区別します。

解答· 理由を書く

C5：表· 二段の式と計算過程· 条件と確認

C6. 初項6、公比−1/2の数列の最初の5項の表と点(n,a_n)を自分でかき、一般項と対応させてください。点の横座標の範囲と符号を説明し、n=3/2をこの数列の項番号にしない理由も書き残してください。

解答· 理由を書く

C6：表· 二段の式と計算過程· 条件と確認

C7・C8：公比・すべての条件と有限の和

C7. 初項2の等比数列で$S_3=14$です。公比は0でない実数とします。公比の全候補と各一般項、S_4を求め、元の三項の和へ戻してください。公比1がこの条件に合うかも確かめてください。

解答・理由を書く

C8. 初項aを−2,5から、公比rを−2,1/2,1から、項数Nを3,6から一つずつ選んでください。一般項・第2項・第N項とS_Nを具体的な式と計算過程で示し、項を一つずつ足した和でも確認してください。r=1は別に説明してください。12通り全てを調べる必要はありません。

解答・理由を書く

C7：表・二段の式と計算過程・条件と確認

C8：表・二段の式と計算過程・条件と確認