Σを開き、最初と最後の項· 項数に戻す

考える手がかり

Σ_{k=2}^{5}(2k+1)では、
kを2,3,4,5と変えます。
項は5,7,9,11で、和は32。
上下の範囲は両端を含み、
5−2+1=4項あります。

和の性質でも2Σ_{k=2}^{5}k+4。
2(2+3+4+5)+4=32です。
定数1は一回でなく4回現れます。
添字k、項の値2k+1、項数4と
和32を分けて対応させます。

nは正の整数です。この教材ではΣの上下は1≦p≦qを満たす整数とします。添字の名前だけを変える場合と、j=k+cのように値と上下をずらす場合は別です。自分で具体的な全項を示してから式と計算過程を確かめます。

編集できる添字· 項の二段の対応表

k	2	3	4	5
2k+1	5	7	9	11

Σ_{k=2}^{5}(2k+1) = 5+7+9+11 = 32

両端を含む4項 / 定数1も4回足す

自分の図と式でたしかめる

自分で最初と最後の添字を、実際の項に対応させます。

項数q−p+1と、定数を何回足すかを確かめます。

Σを最後の一項や、全項の積とは読み替えません。

全項· 上下の範囲· 項数と和

各項を分け、定数を項数の分だけ残す

考える手がかり

Σ_{k=1}^{4}(k²+2)を開くと、
(1+2)+(4+2)+(9+2)+(16+2)。
各項は3,6,11,18で和は38です。
平方の部分30と、定数2が4個の
部分8へ分けられます。

一般にΣ_{k=1}^{n}(k²+2)は
n(n+1)(2n+1)/6+2nです。
定数倍や和の性質は使えますが、
Σ f(k)g(k)を(Σf)(Σg)とする
積の分解は一般にはできません。

kによらない定数は外へ出せますが、kとともに変わる量は定数ではありません。二乗を含む項は先に全体を展開し、各項の二乗の和と和全体の二乗を分けます。同値な正しい式変形· 別解を認め、自分で書いた総和の式と計算過程は講師が確認します。

編集できる四つの平方· 定数と各項

1	4	9	16
+2	+2	+2	+2
3	6	11	18

Σ_{k=1}^{4}(k²+2) = Σk² + 2×4

30+8 = 38 / 定数2は四つある

自分の図と式でたしかめる

自分で各項の全体を展開し、同じ範囲で和を分けます。

定数の和が2nとなる理由を、項の個数から示します。

同じ添字の積の和と、二つの和の積を分けます。

展開· 定数の項数と分けた式と計算過程

有限な差を足し、中間項と残る両端に戻す

考える手がかり

$(k+1)^3-k^3=3k^2+3k+1$を
$k=1,\dots,n$で足します。
左は中間の立方が消えて
$(n+1)^3-1$です。図はn=3の見本で、
差7,19,37の和が63になります。

$B=\Sigma_{k=1}^{n}k^2$と置けば、
$(n+1)^3-1=3B+3n(n+1)/2+n$。
Bについて解いて
$B=n(n+1)(2n+1)/6$です。
n=3ではB=14と確かめられます。

図の三つの差や、数例の一致だけを全てのnの証明とはしません。一般の等式を有限の全範囲で足し、残る両端と右辺の三つの和を示します。線· 点· 文字は編集できますが、動かしても他の数や式は自動更新されません。

編集できる四つの立方と三つの差



$(2^3-1^3)+(3^3-2^3)+(4^3-3^3) = 64-1$

$63 = 3\Sigma_{k=1}^{3}k^2 + 3\times6 + 3$

$\Sigma_{k=1}^{3}k^2 = 14$ / 一般のnも等式から

自分の図と式でたしかめる

自分で相殺される中間の立方と、残る両端を示します。

右辺の平方· 一次· 定数を、同じ範囲の和へ直します。

一般の導出と有限な数例の確認、未確認を分けます。

一般の有限な式と計算過程· 両端と平方和の導出

C1· C2 : 添字· 式と計算過程と有限の和

C1. Σ_{k=4}^{8}(3k−2)の全項、項数と和を示してください。次に8+12+16+20+24をΣで表し、最初と最後の添字が実際の項に対応するか確かめてください。正しい別の添字の付け方も認めます。

解答· 理由を書く

C2. nを正の整数とします。Σ_{k=1}^{n}(2k²+3k−1)を平方· 一次· 定数の三つの和へ分け、nの式で示してください。n=3の全項の直接和で確認し、定数−1が何回現れるかを説明してください。

解答· 理由を書く

C1 : 全項· 両端· 式と計算過程と確認

C2 : 全項· 両端· 式と計算過程と確認

C3· C4 : 添字· 式と計算過程と有限の和

C3. $\Sigma_{k=5}^{11}k^2$を、1からの二つの平方和の差で求めてください。引く範囲、残る全項と項数を示し、直接和でも確認します。

解答· 理由を書く

C4. nを正の整数とします。$\Sigma_{k=1}^{n}(k+3)^2$でj=k+3と置きます。添字と上下の範囲を変えた式と計算過程を示し、1からの平方和の差と、各項を先に展開する方法で確認してください。n=2でも確かめてください。

解答· 理由を書く

C3 : 全項· 両端· 式と計算過程と確認

C4 : 全項· 両端· 式と計算過程と確認

C5· C6：添字· 式と計算過程と有限の和

C5. $(k+1)^3-k^3=3k^2+3k+1$を使い、全ての正の整数nに対する平方和$B(n)=\Sigma_{k=1}^{n}k^2$の式を導いてください。有限な和で消える項と残る両端を示し、n=4の確認と一般の導出を分けます。

解答· 理由を書く

C5：全項· 両端· 式と計算過程と確認

C6. 友人は$\Sigma_{k=1}^{n}(k^2+4)=n(n+1)(2n+1)/6+4$と書きました。n=3の全項で確かめ、誤りの位置を説明し、正の整数nについて正しい式と計算過程へ直してください。

解答· 理由を書く

C6：全項· 両端· 式と計算過程と確認

C7· C8 : 添字· 式と計算過程と有限の和

C7. 友人はΣ_{k=1}^{n}k(k+2)=(Σ_{k=1}^{n}k)(Σ_{k=1}^{n}(k+2))としました。両辺を全項へ開き、増えた項を示して誤りを説明してください。正の整数nでの左辺の正しい式も示してください。

解答· 理由を書く

C8. Aを−1,2から、Bを−3,5から、項数Nを4,7から一つずつ選んでください。Σ_{k=1}^{N}(Ak²+B)の全項と和を示し、平方和と定数の和へ分けた式と計算過程で確認してください。自分の選んだ一例を扱い、8通り全てを調べる必要はありません。

解答· 理由を書く

C7 : 全項· 両端· 式と計算過程と確認

C8 : 全項· 両端· 式と計算過程と確認