Σと有限の和：添字・全項と残る両端

講師用メモ・バージョン 2

生徒が最初と最後の添字を実際の項へ代入し、両端を含む項数を示したかを見ます。和を分けるときは同じ範囲と定数の回数を残し、添字の置換では上下も変えます。有限な相殺では消える中間項と残る両端を示します。正しい同値式や未整理の式と計算過程、別の添字、生徒の選んだ一例を認め、全8条件を必須にしません。生徒の全項・式と計算過程と理由を講師の見本・支援、未確認から分けます。実際の生徒との試用・学習効果は未確認です。

練習問題の解答はこの講師用メモに分けています。編集版であり、実際の授業での試用はまだ行っていません。

C1・C2：添字・式と計算過程と有限の和

C1. $\Sigma_{k=4}^{8}(3k-2)$の全項、項数と和を示してください。次に8+12+16+20+24をΣで表し、最初と最後の添字が実際の項に対応するか確かめてください。正しい別の添字の付け方も認めます。

解答・確認の観点：最初の和は10+13+16+19+22=80で5項。後の和は$\Sigma_{j=2}^{6}4j$又は$\Sigma_{j=1}^{5}(4j+4)=80$。生徒の両端の代入、5項と式と計算過程を確認する。上限の項だけを和にはしない。

C2. nを正の整数とします。$\Sigma_{k=1}^{n}(2k^2+3k-1)$を平方・一次・定数の三つの和へ分け、nの式で示してください。n=3の全項の直接和で確認し、定数−1が何回現れるかを説明してください。

解答・確認の観点：$2\Sigma k^2+3\Sigma k-n=2n(n+1)(2n+1)/6+3n(n+1)/2-n=n(4n^2+15n+5)/6$。n=3なら4+13+26=43。生徒の同じ範囲・式と計算過程と−1をn個足す理由を見る。正しい未整理の同値式も認める。

C3・C4：添字・式と計算過程と有限の和

C3. $\Sigma_{k=5}^{11}k^2$を、1からの二つの平方和の差で求めてください。引く範囲、残る全項と項数を示し、直接和でも確認します。

解答・確認の観点：$B(11)-B(4)=11\cdot12\cdot23/6-4\cdot5\cdot9/6=506-30=476$。残る7項は25,36,49,64,81,100,121で和476。引くのは第4項までで、第5項を引かない。生徒の両端・7項と二つの式を見る。

C4. nを正の整数とします。$\Sigma_{k=1}^{n}(k+3)^2$で$j=k+3$と置きます。添字と上下の範囲を変えた式と計算過程を示し、1からの平方和の差と、各項を先に展開する方法で確認してください。n=2でも確かめてください。

解答・確認の観点：$\Sigma_{j=4}^{n+3}j^2=B(n+3)-B(3)=B(n+3)-14$。展開では$B(n)+6A(n)+9n=n(2n^2+21n+73)/6$。k=1でj=4、k=nでj=n+3。n=2は16+25=41。生徒の新しい両端・同じn項・二つの式を認める。

C5・C6：添字・式と計算過程と有限の和

C5. $(k+1)^3-k^3=3k^2+3k+1$を使い、全ての正の整数nに対する平方和$B(n)=\Sigma_{k=1}^{n}k^2$の式を導いてください。有限な和で消える項と残る両端を示し、n=4の確認と一般の導出を分けます。

解答・確認の観点：左の有限和は$(2^3-1^3)+\dots+((n+1)^3-n^3)=(n+1)^3-1$。右は$3B(n)+3n(n+1)/2+n$。B(n)について解けば$n(n+1)(2n+1)/6$。n=4は1+4+9+16=30。生徒の全nの等式・両端と導出を見る。数例だけを全nの証明にはしない。

C6. 友人は$\Sigma_{k=1}^{n}(k^2+4)=n(n+1)(2n+1)/6+4$と書きました。n=3の全項で確かめ、誤りの位置を説明し、正の整数nについて正しい式と計算過程へ直してください。

解答・確認の観点：n=3では5+8+13=26だが、友人の式は14+4=18。4はn回現れるので正しくは$B(n)+4n=n(n+1)(2n+1)/6+4n$。生徒の反例・定数の項数と一般の修正を見る。

C7・C8：添字・式と計算過程と有限の和

C7. 友人は$\Sigma_{k=1}^{n}k(k+2)=(\Sigma_{k=1}^{n}k)(\Sigma_{k=1}^{n}(k+2))$としました。n=2の両辺を全項へ開き、増えた項を示して誤りを説明してください。正の整数nでの左辺の正しい式も示してください。

解答・確認の観点：n=2の左は1·3+2·4=11、右は(1+2)(3+4)=21。増えた交差項1·4+2·3=10を分ける。左は$\Sigma(k^2+2k)=B(n)+2A(n)=n(n+1)(2n+7)/6$。生徒の全展開と、同じ添字の積の和を二つの和の積としない理由を見る。

C8. Aを−1,2から、Bを−3,5から、項数Nを4,7から一つずつ選んでください。$\Sigma_{k=1}^{N}(Ak^2+B)$の全項と和を示し、平方和と定数の和へ分けた式と計算過程で確認してください。自分の選んだ一例を扱い、8通り全てを調べる必要はありません。

解答・確認の観点：作例A=2,B=−3,N=4なら全項は−1,5,15,29で和48。2·4·5·9/6−3·4=48も一致する。一般に$A\cdot N(N+1)(2N+1)/6+BN$。生徒の別の許された一例・全項・式と計算過程と二つの確認を認める。

利用と出典表示

© 2026 MomentDesk / PRYADKO DANILA. 無料・有料の授業で利用し、自分の授業用に変更できます。共有時はMomentDeskの出典表示を残してください。テンプレートの転売や、自作としての再公開はできません。

文部科学省・数学B：Σ・いろいろな和と公式の導出（冊子102–103/PDF114–115）— https://www.mext.go.jp/content/20260115-mxt_kyoiku02-100002620_04.pdf#page=114